Pázmány Péter Katolikus Egyetem
Bölcsészettudományi Kar
Szociológia Intézet

Matematikai statisztika 1
(BBNSZ01201)

LINEÁRIS ALGEBRA

MARX KÁROLY KÖZGAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM

Dr. Halmai Erzsébet — Dr. Krekó Béla

LINEÁRIS ALGEBRA

KÉZIRAT
17. változatlan kiadás

TANKÖNYVKIADÓ, BUDAPEST, 1989

LINEÁRIS ALGEBRA

2. A lineáris térről

2.1. Az n-elemű vektorok halmaza

A következőkben a speciális mátrixok közt bevezetett n-elemü vektorokkal foglalkozunk.

Mivel egy vektor komponensei bármely valós értéket felvehetnek, nyilvánvaló, hogy végtelen sok n-elemü vektor van. Ezek szerint az n elemü vektorok összessége végtelen halmaz.

Az n-elemü vektorok halmazát a következőkben L_n szimbólummal jelöljük, ahol n a vektorok komponenseinek számára utal.

A halmazokról tanultak szerint ha

$$\underline{a} \in L_n,$$

akkor az $\underline{a}$ egy n-elemü vektort jelent.

Az előzőekben megismert összefüggések alapján az L_n halmaz az alábbi tulajdonságokkal rendelkezik:

a) Az L_n halmaz elemei között értelmezve van mind az összeadás, mind pedig a skalárral való szorzás müvelete.

Ez annyit jelent, hogy két n-elemü vektor összege, n-elemü vektornak bármely skalárral alkotott szorzata ugyancsak n-elemü vektort ad eredményül.

A most megfogalmazott két állitást matematikai szimbólumokkal igy rögzithetjük:

$$\underline{a}_1, \underline{a}_2 \in L_n \Rightarrow \underline{a}_1 + \underline{a}_2 \in L_n$$

$$\underline{a}_1 \in L_n \Rightarrow \lambda \underline{a}_1 \in L_n.$$

Ezekből az is következik, hogy az L_n elemeinek bármely lineáris kombinációja ugyancsak eleme az L_n halmaznak, amit röviden igy irhatunk fel:

$$\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_k \in L_n \Rightarrow \lambda_1 \underline{a}_1 + \lambda_2 \underline{a}_2 + \ldots + \lambda_k \underline{a}_k \in L_n .$$

b) Az n-elemü vektorok összeadására és skalárral való szorzására érvényes mind a kommutativitás mind az asszociativitás, mind pedig a disztributivitás.

Közelebbről vizsgálva ezeket a tulajdonságokat ez azt jelenti, hogy a tetszőlegesen kiválasztott

$$\underline{a}_1,\ \underline{a}_2,\ \underline{a}_3 \in L_n$$

vektorokra nézve érvényesek az alábbi relációk:

$$\left.\begin{array}{l} \underline{a}_1 + \underline{a}_2 = \underline{a}_2 + \underline{a}_1 \\ \alpha\ \underline{a}_1 = \underline{a}_1\,\alpha \end{array}\right\}\ \text{kommutativitás}$$

$$\left.\begin{array}{l} (\underline{a}_1 + \underline{a}_2) + \underline{a}_3 = \underline{a}_1 + (\underline{a}_2 + \underline{a}_3) \\ \alpha(\beta\,\underline{a}_1) = (\alpha\beta)\,\underline{a}_1 \end{array}\right\}\ \text{asszociativitás}$$

$$\left.\begin{array}{l} (\alpha + \beta)\ \underline{a}_1 = \alpha\underline{a}_1 + \beta\,\underline{a}_1 \\ \alpha(\underline{a}_1 + \underline{a}_2) = \alpha\,\underline{a}_1 + \alpha\,\underline{a}_2 \end{array}\right\}\ \text{disztributivitás}$$

c) Az L_n-nek van nulla eleme is: az n-elemü nullvektor, amelyre nézve bármely $\underline{a}_1 \in L_n$ vektor esetén érvényes az

$$\underline{a}_1 + \underline{0} = \underline{a}_1$$

azonosság.

d) Minden $\underline{a}_1 \in L_n$ elem eleget tesz az

$$1\ \underline{a}_1 + (-1)\ \underline{a}_1 = \underline{0}$$

egyenlőségnek, vagyis az L_n halmaz bármely eleméhez tartalmazza annak ellentettjét.

Ha a fenti tulajdonságokat tekintjük, könnyü belátni, hogy ezeknek nemcsak az n-elemü vektorok tesznek eleget, hanem pl. az n-edrendü mátrixok is.

E közös tulajdonságok teljesitésének kifejezésére uj fogalmat, a lineáris tér fogalmát vezetjük be.

Valamely adott L halmazt lineáris térnek nevezünk, ha azokra a következő feltételek teljesülnek:

a) Az L halmaz elemei között értelmezve van mind az összeadás, mind a skalárral való szorzás müvelete.

b) Az L-ben értelmezett két müvelet rendelkezik mind a kommutativitás, mind az asszociativitás, mind pedig a disztributivitás tulajdonságával.

c) Az L halmaznak van olyan null eleme, amelyet az L halmaz bármely eleméhez hozzáadva, azt változatlanul hagyja.

d) Az L halmaz bármely eleméhez az L halmaznak van olyan eleme, amelyre ezek összege a null elemet adja, vagyis az L halmaz minden elemének van ellentettje.

Példák a lineáris térre:

a) az n-elemü vektorok halmaza,

b) az n-edrendü kvadratikus mátrixok halmaza

c) az azonos tipusu pl. m.n-es mátrixok összessége stb.

A következőkben nem kivánjuk teljes általánosságukban vizsgálni a lineáris tereket, csupán az n-elemü vektorok terére irányitjuk figyelmünket, mert annak ismerete elégséges számunkra a gazdasági problémák vizsgálatához.

Az n-elemü vektorok L_n lineáris terével kapcsolatban n értékétől függően beszélünk az egy-elemü vektorok lineáris teréről, az L_1 lineáris térről, a kételemü vektorok L_2 lineáris teréről stb. Az L_1 lineáris tér nem más, mint a valós számok halmaza, amit szokás a számegyenes pontjaival szemléltetni. Ilyen "geometriai megfeleltetés" lehetséges az L_2 lineáris térre is, amelyet a sik pontjai reprezentálhatnak, vagy az L_3 lineáris térre, amelyet a mindennapi szóhasználat szerinti pontok szemléltethetnek. Mivel a többelemü vektorok ilyen értelmü ábrázolása lehetetlen, látható, hogy az n-elemü vektorok lineáris terénél a "tér" kifejezés csupán átvitt értelemben használatos.

A lineáris térrel kapcsolatban bevezetjük az "altér" fogalmát.

Ha az n-elemü vektorok L_n lineáris teréből az

$$\underline{a}_1,\ \underline{a}_2,\ \dots,\ \underline{a}_k$$

vektorokat kiemeljük és azok összes lehetséges

$$x_1\underline{a}_1 + x_2\underline{a}_2 + \dots + x_k\underline{a}_k = \underline{s}$$

lineáris kombinációit tekintjük, ahol $x_1, x_2, \ldots, x_k$ valós számok, ismét n-elemü vektorok végtelen halmazát nyerjük. E halmazt L'-vel jelöljük és az L_n lineáris tér alterének nevezzük.

Az L' halmaz egyszerübb leirására az $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_k$ vektorokat tekintsük egy $\underline{A}$ mátrix oszlopvektorainak, vagyis:

$$\underline{A} = [\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_k],$$

az $x_1, x_2, \ldots, x_k$ skalárokat pedig egy $\underline{x}$ vektor komponenseinek.

Igy az

$$\underline{A}\,\underline{x} = \underline{s}$$

kifejezés éppen az $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_k$ vektorok lineáris kombinációt szimbolizálja. Az összes lehetséges $\underline{s}$ vektor alkotta L' halmazt ezek szerint a következő formában irhatjuk:

$$\underline{L}' = \{ \underline{s} / \underline{s} = \underline{A}\,\underline{x} \},$$

s igy olvassuk: az L' mindazon $\underline{s}$ vektorok halmazát jelenti, amelyek az $\underline{A}$ mátrix oszlopvektorainak összes lehetséges lineáris kombinációival állithatók elő. (Egy-egy halmaz definiálására a későbbiekben is gyakran fogunk ehhez hasonló irásmódhoz folyamodni. A jelölésnél először feltüntetjük a halmaz elemeinek általános szimbólumát, azután függőleges vonást huzunk, és végül megadjuk a halmaz elemeinek képzési módját.)

1. Tétel: Az L' altér részhalmaza az L_n lineáris térnek, vagyis $L' \subset L_n$.

Bizonyitás: Az állitás szerint az L' halmaz minden eleme egyuttal eleme az L_n lineáris térnek is. Az L_n-re adott definició alapján, ha

$$\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_k \in L_n,$$

akkor

$$\underline{s} = x_1 \underline{a}_1 + x_2 \underline{a}_2 + \ldots + x_k \underline{a}_k \in L_n$$

is fennáll, ami éppen a tételt bizonyitja.

2. Tétel: Az L' altér önmagában is lineáris teret képez.

Bizonyitás: Annak belátására, hogy L' altér lineáris tér, ki kell mutatnunk, hogy L' halmazra teljesülnek a lineáris térre kikötött feltételek. E végből

a) legyen $\underline{s}_1$ és $\underline{s}_2$ két tetszőleges eleme az L'-nek, azaz teljesüljön az $\underline{s}_1, \underline{s}_2 \in L'$ feltétel. E feltétel szerint található olyan $\underline{x}_1$ és $\underline{x}_2$ vektor, amelyre nézve

$$\underline{s}_1 = \underline{A}\ \underline{x}_1$$

ill.

$$\underline{s}_2 = \underline{A}\ \underline{x}_2.$$

A müveleti szabályok értelmében

$$\underline{s}_1 + \underline{s}_2 = \underline{A}\ \underline{x}_1 + \underline{A}\ \underline{x}_2 = \underline{A}\ (\underline{x}_1 + \underline{x}_2),$$

ami azt jelenti, hogy

$$\underline{s}_1 + \underline{s}_2 \in L'.$$

Másrészt

$$\alpha\ \underline{s}_1 = \alpha (\underline{A}\ \underline{x}_1) = \underline{A}\ (\alpha\ \underline{x}_1),$$

ami szerint

$$\alpha\ \underline{s}_1 \in L'.$$

Igy az L' halmaz elemei között értelmezve van mind az összeadás, mind pedig a skalárral való szorzás.

b) Abból a tényből, hogy L' részhalmaza L_n-nek, következik, hogy az L' vektorainak összegére és skalárral való szorzatára nézve érvényes a kommutativitás, az asszociativitás és a disztributivitás.

c) S mivel $\underline{x} = \underline{o}$ esetén

$$\underline{s} = \underline{A}\ .\ \underline{o} = \underline{o},$$

világos, hogy az L' is tartalmaz nullelemet, azaz $\underline{o} \in L'$.

d) Végül pedig bármely $\underline{s} \in L'$ vektorra nézve érvényes az

$$1 \cdot \underline{s} = 1(\underline{A}\ \underline{x}) = (1\ \underline{A}) \cdot \underline{x} = \underline{A}\ \underline{x} = \underline{s},$$

azaz

$$1\ \underline{s} = \underline{s}$$

illetve

$$1 \cdot \underline{s} - \underline{s} = \underline{0}$$

kikötés is.

Mindezekből látható, hogy az L' valóban eleget tesz a lineáris térrel szemben támasztott négy követelménynek. Az L' tér tehát valóban lineáris tér.

Az L'-t az $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_k$ vektorok által kifeszitett (vagy generált) altérnek is szoktuk nevezni.

Megjegyzések:

a) Ha az $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_k$ vektorok által meghatározott $\underline{A}$ mátrix nullmátrix, akkor az L' egyetlen vektort tartalmaz, a nullvektort. Ezt igy jelöljük:

$$L' = \{\underline{0}\}.$$

Az igy nyert altér az un. zérusaltér. A zérus-alteret nem valódi altérnek tekintjük.

b) Nem valódi altérről beszélünk akkor is, ha az L_n minden vektora L'-nek is vektora és megforditva.

c) Az L'-t az L_n valódi alterének hivjuk, ha az L' olyan lineáris tér, amelyre nézve

$$L' \subset L_n,$$

de

$$L' \neq L_n \quad \text{és} \quad L' \neq \{\underline{0}\}.$$

d) Az L' mindig részhalmaza L_n-nek, de L_n-nek nem minden részhalmaza altér.

e) Az L' altér generálásának nem egyetlen módja az itt adott eljárás.

Ezek után tekintsük pl. az L_3 lineáris teret, a három-elemü vektorok terét.

1. Példa: Határozzuk meg az $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2 \in L_3$ vektorok által generált alteret. A generáló vektorokhoz tartozó $\underline{A}$ mátrix

$$[\underline{e}_1, \underline{e}_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

igy

$$\underline{s} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix},$$

ahonnan

$$L' = \{\underline{s} \mid \underline{s} = \underline{A}\,\underline{x}\}.$$

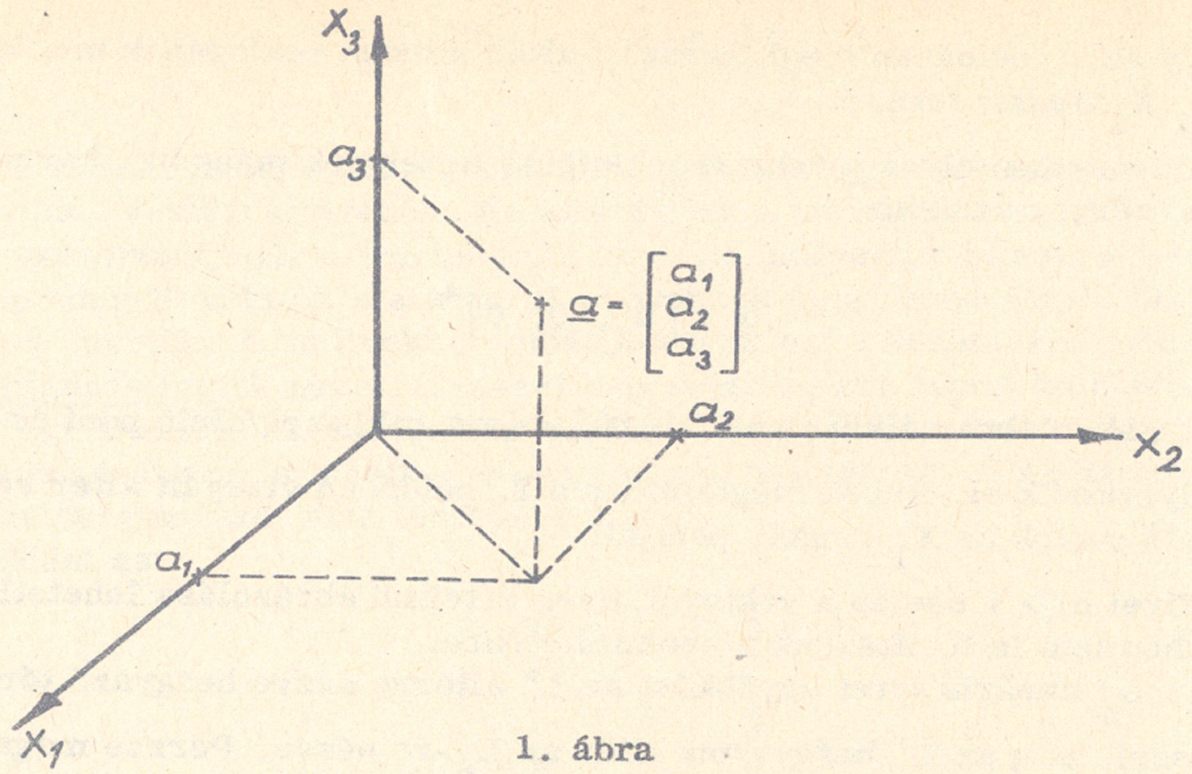
Az L', tehát mindazon három-elemü vektorokat tartalmazza, amelyek harmadik komponense zérus.

2. Példa: Határozzuk meg az $\underline{e}_1 = [1, 0, 0]^*$ vektor által kifeszitett alteret! Mivel az alteret generáló mátrix itt egyetlen oszlopot tartalmaz, az L' altér elemeit az $\underline{s} = x\,\underline{e}_1$ vektorok képezik, amelyeknek második és harmadik komponense zérus.

Emlitettük, hogy az L_3 tér vektorait a közönséges értelemben vett tér pontjai szemléltethetik. Igy az

$$\underline{a} = [a_1, a_2, a_3]^*$$

vektor geometriai képét a térbeli koordináta-rendszer felvétele esetén a következő módon ábrázolhatjuk:

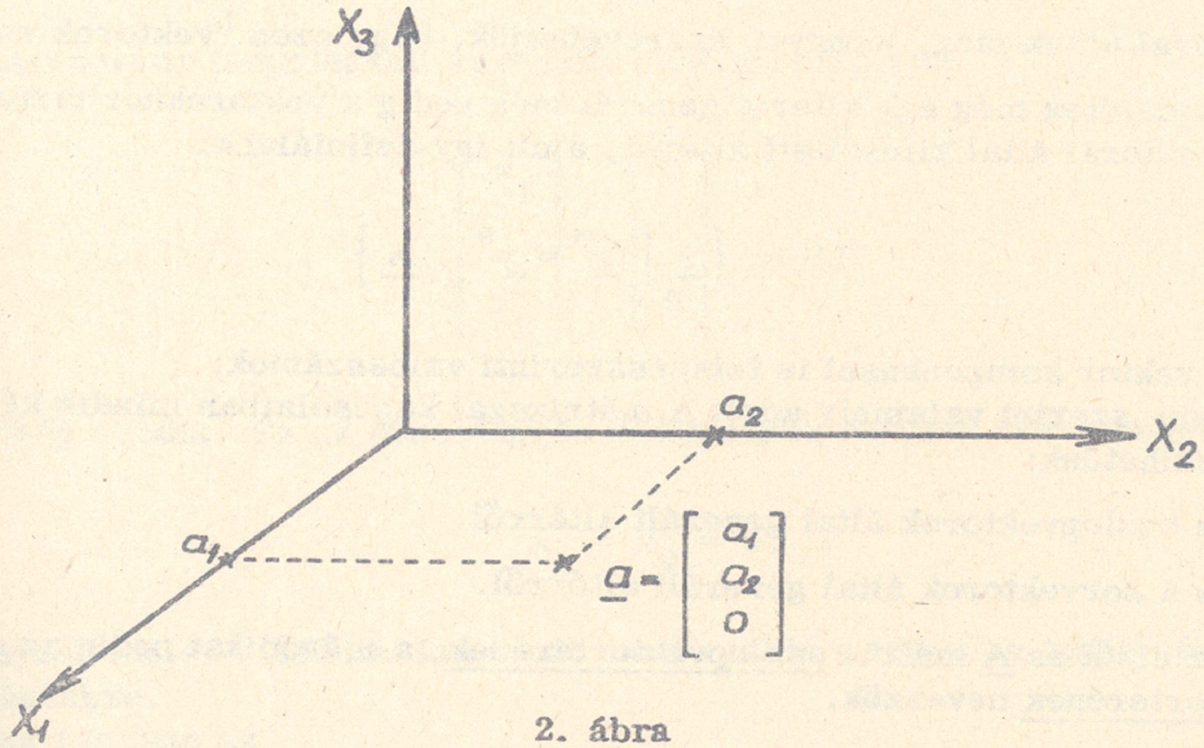


1. ábra

Ha történetesen az $\underline{a}$ vektor harmadik komponense zérus, azaz

$$\underline{a} = [a_1, a_2, 0]^*,$$

akkor a vektornak megfelelő pont az alábbi ábra szerint az X_1X_2 tengelyek által meghatározott sikban van.



2. ábra

Igy az 1. példában meghatározott altér minden vektorának megfelelő pont is az X_1 X_2 sikban fekszik.

Amennyiben olyan $\underline{a}$ vektort tekintünk, amelynek második, harmadik komponense zérus, azaz az

$$\underline{a} = [a_1, 0, 0]^*$$

vektort, akkor ábra nélkül is belátható, hogy a neki megfelelő pont az X_1 tengelyen helyezkedik el. Ennek megfelelően a 2. példában vizsgált altér vektorainak megfelelő pontok az X_1 tengely pontjai.

Mivel $n > 3$ esetén a vektorok ilyen értelmü ábrázolása lehetetlen, a későbbiekben nem is törekszünk a szemléltetésre.

Az L_n lineáris teret egyébként az L' altérre nézve beágyazó térnek is szoktuk nevezni, mig az L' beágyazott altér az L_n-re nézve. Persze maga a beágyazó tér is lehet altere, még pedig valódi altere is egy harmadik lineáris térnek. Amikor tehát altérről beszélünk, valójában mindig eleve feltételezünk egy beágyazó lineáris teret.

Az $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_k \in L_n$ vektorok által kifeszitett alteret

$$L' = \{\underline{s} \mid \underline{s} = \underline{A}\ \underline{x}\}$$

definicióval adtuk meg. Könnyen észrevehetjük, hogy ezen "vektorok rendszere"[1] egyidejüleg még egy alteret generál még pedig a vektorokhoz tartozó mátrix sorvektorai által kifeszitett alteret, amit igy definiálunk:

$$L'' = \{\underline{r} \mid \underline{r}^* = \underline{y}^* \cdot \underline{A}\} ,$$

ahol $\underline{y}^*$ vektor komponensei is tetszésszerinti valósszámok.

Ezek szerint valamely adott $\underline{A}$ mátrixszal kapcsolatban mindig két altérről beszélhetünk:

az oszlopvektorok által generált altérről

és a sorvektorok által generált altérről.

Az elsőt az $\underline{A}$ mátrix <u>oszlopvektorterének</u>, a másodikat pedig az $\underline{A}$ mátrix <u>sorvektorterének</u> nevezzük.

---

[1] Vektorrendszeren mi mindig valamely, lineáris tér vektorainak véges halmazát fogjuk érteni.

2.2. A lineáris függetlenség

Mint láttuk, adott vektorok lineáris kombinációi fontos szerepet töltenek be az n-elemü vektorok terében. Az altérre adott definició szerint, az alteret generáló vektorok lineáris kombinációi között a nullvektor mindig szerepel. Ha ugyanis mindegyik vektort o skalárral szorozzuk meg, eredményül biztosan a nullvektort nyerjük. A nullvektor előállitásának ezt a kézenfekvő módját triviális előállitásnak fogjuk nevezni. Ezzel kapcsolatban két esetet különböztethetünk meg. Az egyik esetben a nullvektor előállitására csakis a triviális lehetőség áll rendelkezésünkre; a másik esetben pedig a nullvektor előállitására a triviális lehetőségen kivül más lehetőség is van.

Például az

$$x_1\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

lineáris kombinációt vizsgálva, állapitsuk meg, hogy milyen (x_1, x_2) értékpár mellett szolgáltathat ez nullvektort, vagyis

$$x_1\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

egyenletrendszer megoldásait keressük meg. Ahonnan az

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

egyenlőség adódik. Ez az összefüggés pedig akkor és csak akkor teljesülhet, ha

$$x_1 = x_2 = 0.$$

A nullvektor előállitására tehát most csakis a triviális lehetőség áll rendelkezésünkre.

Ha azonban az

$$x_1 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

lineáris kombinációt tekintjük, amely a müveleti szabályoknak megfelelően az

$$x_1 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ -x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4x_2 \\ 2x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2(-x_1 + 2x_2) \\ -x_1 + 2x_2 \end{bmatrix}$$

vektorhoz vezet, már nemcsak a triviális megoldással nyerhetünk nullvektort. Mivel a kapott vektor első komponense a második komponens "-2"-szerese, azért ez a lineáris kombináció minden olyan esetben nullvektort ad, amikor teljesül a

$$-x_1 + 2x_2 = 0$$

egyenlőség. Ennek az egyenletnek azonban végtelen sok megoldása van. A triviálison kivül más lehetőség is van a nullvektor előállitására. Ilyen megoldás pl. az $x_1 = 8$ és $x_2 = 4$, amelyekre a kérdéses lineáris kombináció valóban nullvektort ad.

Ennek belátása alapján bevezetjük a lineárisan független vektorok fogalmát.

<u>Az L_n lineáris tér $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_k$ vektorait lineárisan független vektoroknak nevezzük, ha lineáris kombinációjuk révén a nullvektort csakis a triviális módon tudjuk előállitani.</u>

Ezt a meghatározást igy is megfogalmazhatjuk: az

$$\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_k$$

vektorokat lineárisan független vektoroknak nevezzük, ha az

$$x_1 \underline{a}_1 + x_2 \underline{a}_2 + \ldots + x_k \underline{a}_k = \underline{0}$$

egyenlet akkor és csak akkor állhat fenn, ha az

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_k = 0$$

feltétel teljesül. Ha az $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_k$ vektorok <u>csak</u> zérus skalár szorzókkal képzett lineáris kombinációval állitják elő a nullvektort, az $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_k$ vektorok <u>lineárisan független rendszert</u> képeznek, ellenkező esetben azt mondjuk, hogy az adott <u>vektorok lineárisan függő rendszert</u> alkotnak.

Az adott definició szerint a vizsgált

$$[1,\ 0] \quad \text{és} \quad [0,\ 1]$$

vektorok lineárisan független rendszert alkotnak, a

$$[2,\ -1] \quad \text{és} \quad [-4,\ 2]$$

vektorok pedig lineárisan függő vektorok.

A továbbiakban az L_n valamely $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_k$ vektorrendszerének vizsgálatánál elsődleges lesz annak eldöntése, hogy a kérdéses vektorok lineárisan függetlenek-e vagy nem.

A bevezetett uj fogalommal kapcsolatban tekintsük a következő állitásokat:

1. <u>Tétel:</u> Ha az $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_k$ vektorok között a nullvektor is szerepel, akkor ezek a vektorok lineárisan függő rendszert alkotnak.

<u>Bizonyitás:</u> Ha történetesen az $\underline{a}_1 = \underline{0}$, akkor az

$$x_1 \underline{a}_1 + x_2 \underline{a}_2 + \ldots + x_k \underline{a}_k = \underline{0}$$

egyenlőség bármely x_1 skalár mellett fennáll, mivel

$$x_1 \cdot \underline{0} + 0 \cdot \underline{a}_2 + \ldots + 0 \cdot \underline{a}_k = \underline{0}.$$

Igy az adott vektorok nem lehetnek lineárisan független vektorok. Az állitást ugyis megfogalmazhatjuk, hogy lineárisan független vektorok között a nullvektor nem szerepelhet.

2. <u>Tétel:</u> Lineárisan független vektorok minden nem-üres részhalmaza ugyancsak lineárisan független rendszert alkot.

Az állitás helyességét indirekt bizonyitással láthatjuk be.

Feltesszük, hogy az $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_k$ lineárisan független vektorok közül egyiket pl. az $\underline{a}_1$ vektort elhagyva, az $\underline{a}_2, \underline{a}_3, \dots, \underline{a}_k$ un. maradékrendszer lineárisan függő, azaz az

$$x_2 \underline{a}_2 + x_3 \underline{a}_3 + \dots + x_k \underline{a}_k = \underline{0}$$

egyenletnek létezik a triviálistól különböző megoldása is. Aztán az elhagyott $\underline{a}_1$ vektor $x_1 = 0$-szorosát hozzácsatoljuk a fenti egyenlethez:

$$x_1 \underline{a}_1 + \left[x_2 \underline{a}_2 + \dots + x_k \underline{a}_k \right] = \underline{0}$$

Eszerint azonban az $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_k$ vektorok lineárisan függő rendszert adnának, ami ellentmond a tétel állításának.

Mivel a feltétel ellentmondáshoz vezetett, annak ellenkezője igaz, vagyis a maradékrendszer is lineárisan független rendszert alkot. Ugyanez vonatkozik az előbbi maradékrendszerre és az ebből nyerhető további maradék rendszerekre is. Igy nyilvánvaló állításunk helyessége.

<u>Következmény:</u>

Az egyetlen $\underline{a}$ vektorból álló rendszert lineárisan független rendszernek tekintjük, ha

$$\underline{a} \neq \underline{0}.$$

Ezért kellett a 2. tételben kikötnünk, hogy az állítás csak a visszamaradó "nem-üres" részhalmazra vonatkozik.

3. <u>Tétel</u>: Az $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_k, \underline{b}$ vektorrendszer <u>akkor és csak akkor</u> lineárisan függőrendszer, ha <u>legalább</u> egyikük előállitható a többi lineáris kombinációjaként.

A tétel bizonyitását megkönnyiti, ha észrevesszük, hogy "megfordítható tételről" van szó. Az állítás helyessége ennek alapján két lépésben látható be.

a) Ha pl. a $\underline{b}$ vektor felirható, mint az $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_k$ vektorok lineáris kombinációja, akkor az $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_k, \underline{b}$ vektorok lineárisan függő rendszert képeznek.
A feltétel értelmében ugyanis

$$\underline{b} = x_1 \underline{a}_1 + x_2 \underline{a}_2 + \dots + x_k \underline{a}_k,$$

azaz

$$x_1 \underline{a}_1 + x_2 \underline{a}_2 + \ldots + x_k \underline{a}_k - 1 \cdot \underline{b} = \underline{0}.$$

Az utolsó egyenlőségben azonban az $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_k, \underline{b}$ vektorok nem mind zérus skalárok segitségével állitották elő a nullvektort. Ezek szerint a kérdéses vektorok valóban lineárisan függő rendszert képeznek.

b) Másrészt, ha az $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_k, \underline{b}$ vektorok lineárisan függő vektorok, akkor legalább az egyikük előállitható a többi lineáris kombinációjaként. Ebben az esetben ugyanis az

$$y_1 \underline{a}_1 + y_2 \underline{a}_2 + \ldots + y_k \underline{a}_k + y_{k+1} \cdot \underline{b} = \underline{0}$$

egyenletnek van a triviálistól különböző megoldása is. (Ha ilyen megoldás nem létezne, akkor az adott vektorok lineárisan független vektorok lennének, ami ellentmond a feltételünknek.)
Legyen pl. az $y_{k+1} \neq 0$, akkor a fenti egyenletből nyert

$$y_{k+1} \underline{b} = -y_1 \underline{a}_1 - y_2 \underline{a}_2 - \ldots - y_k \underline{a}_k$$

egyenletben az

$$y_{k+1} \neq 0$$

skalárral osztva, a

$$\underline{b} = -\frac{y_1}{y_{k+1}} \cdot \underline{a}_1 - \frac{y_2}{y_{k+1}} \cdot \underline{a}_2 - \ldots - \frac{y_k}{y_{k+1}} \underline{a}_k$$

összefüggéshez jutunk. Ha pedig bevezetjük a

$$-\frac{y_1}{y_{k+1}} = x_1, \quad -\frac{y_2}{y_{k+1}} = x_2, \ \ldots, \ -\frac{y_k}{y_{k+1}} = x_k$$

jelöléseket, akkor

$$\underline{b} = x_1 \underline{a}_1 + x_2 \underline{a}_2 + \ldots + x_k \underline{a}_k,$$

vagyis a $\underline{b}$ vektor kifejezhető a többi lineáris kombinációjaként, ahogy állitottuk.

Tételünk nem állitja, hogy egy lineárisan függő rendszer minden vektora kifejezhető a többi lineáris kombinációjaként, csupán azt mondja ki, hogy a lineárisan függő vektorok között legalább egy olyan vektor található, amelyre érvényes ez a tulajdonság.

2.3. Vektorrendszerek rangja

Az L' alteret generáló $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_k$ vektorok alkotta vektorrendszert vizsgáljuk ujabb szempont szerint.

Mint már emlitettük:

Vektorrendszeren az adott L_n lineáris tér vektorainak valamely véges halmazát értjük.

A vektorrendszerek legfontosabb jellemzője a rang nagysága.

Egy vektorrendszer rangja r, ha a kérdéses vektorrendszerből feltétlenül kiválasztható r számu lineárisan független vektor, a vektorrendszer bármely r + 1 számu vektora azonban már lineárisan függő rendszert alkot.

Például az

$$\underline{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{a}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

vektorrendszer rangja 2, mert ha az $\underline{a}_1$ és $\underline{a}_2$ vektorokat tekintjük, azok lineárisan függetlenek, ahogy ezt korábban már beláttuk, de az $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3$ már függő rendszert alkot, mivel

$$\underline{a}_3 = 1 \cdot \underline{a}_1 + 2\,\underline{a}_2.$$

Megjegyzések: a) A rang fogalma bizonyos maximum tulajdonsággal rendelkezik.

b) Ha történetesen a vektorrendszer minden vektora nullvektor, akkor a rangot 0-nak tekintjük, azaz r = 0. Minden egyéb esetben természetes számot jelent a rang.

Ezek után tekintsünk erre az uj fogalomra vonatkozóan néhány állitást.

1. Tétel: Ha az $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_k$ vektorrendszer rangja r, és a belőle kiválasztott $\underline{a}_{j_1}, \underline{a}_{j_2}, \ldots, \underline{a}_{j_r}$ vektorok történetesen lineárisan függetlenek, akkor a vektorrendszer bármely vektora előállitható ennek az r lineárisan független vektornak lineáris kombinációjaként, méghozzá egyértelmüen.

Bizonyitás: Ennek belátására induljunk ki a következő meggondolásból: mivel az adott vektorok sorrendje a rang szempontjából teljesen közömbös, a vektorrendszer vektorai tetszés szerint átrendezhetők, azaz minden további nélkül feltehetjük, hogy

$$\underline{a}_{j_1} = \underline{a}_1 \;;\; \underline{a}_{j_2} = \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_{j_r} = \underline{a}_r .$$

Ez annyit jelent, hogy a vektorrendszer átrendezése után, a kiválasztott r lineárisan független vektor éppen egybeesik az uj sorrendben felirt vektorrendszer első r vektorával.

Ilyen megállapodás mellett természetesen, hogy az első r vektor előállitható az $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_r$ vektorok lineáris kombinációjaként.

Igy

$$\underline{a}_1 = 1 \cdot \underline{a}_1 + 0 \cdot \underline{a}_2 + \ldots + 0 \cdot \underline{a}_r$$

$$\underline{a}_2 = 0 \cdot \underline{a}_1 + 1 \cdot \underline{a}_2 + \ldots + 0 \cdot \underline{a}_r$$

$$\vdots$$

$$\underline{a}_r = 0 \cdot \underline{a}_1 + 0 \cdot \underline{a}_2 + \ldots + 1 \cdot \underline{a}_r .$$

Könnyü azonban belátni, hogy az $\underline{a}_{r+1}, \underline{a}_{r+2}, \ldots, \underline{a}_k$ bármelyike is felirható az $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_r$ vektorok lineáris kombinációjaként. Legyen $\underline{a}_j$ az $\underline{a}_{r+1}, \underline{a}_{r+2}, \ldots, \underline{a}_k$ vektorok valamelyike.

Mivel a vektorrendszer rangja r, az r+1 vektorból álló

$$\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_r, \underline{a}_j$$

rendszer feltétlenül lineárisan függő. Ez azt jelenti, hogy az

$$x_1 \underline{a}_1 + x_2 \underline{a}_2 + \ldots + x_r \underline{a}_r + x_j \underline{a}_j = \underline{0}$$

egyenletnek van nem-triviális megoldása. Ilyen nem triviális megoldásban az x_j skalár értéke biztosan különbözik a 0-tól. Az $x_j = 0$ esetén ugyanis az

$$x_1 \underline{a}_1 + x_2 \underline{a}_2 + \ldots + x_r \underline{a}_r = \underline{0}$$

egyenletnek kellene rendelkeznie nem-triviális megoldással, ami ellentmond a kiválasztott vektorok lineáris függetlenségének.

Bármely nem-triviális megoldás esetén tehét $x_j \neq 0$ és az

$$x_1 \underline{a}_1 + x_2 \underline{a}_2 + \ldots + x_r \underline{a}_r + x_j \underline{a}_j = \underline{0}$$

egyenlet $\underline{a}_j$-re megoldható, azaz

$$\underline{a}_j = \left(-\frac{x_1}{x_j}\right) \underline{a}_1 + \left(-\frac{x_2}{x_j}\right) \underline{a}_2 + \ldots + \left(-\frac{x_r}{x_j}\right) \underline{a}_r .$$

Ezzel bebizonyitottuk tételünk első részét.

Az előállitás egyértelmüsége azt jelenti, hogy a kiválasztott r darab lineárisan független vektornak csak egyetlen olyan lineáris kombinációja van, amely az adott vektorrendszer valamely $\underline{a}_i$ vektorát előállitja.

Tegyük ugyanis fel, hogy $\underline{a}_i$ vektor az $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_r$ vektorok lineáris kombinációjaként kétféleképpen is felirható:

$$\begin{aligned} \underline{a}_i &= y_1 \underline{a}_1 + y_2 \underline{a}_2 + \ldots + y_r \underline{a}_r \\ & \qquad\qquad\qquad (i = 1, 2, \ldots, r, r+1, \ldots, k). \\ \underline{a}_i &= z_1 \underline{a}_1 + z_2 \underline{a}_2 + \ldots + z_r \underline{a}_r \end{aligned}$$

Ha az első egyenletből kivonjuk a másodikat, azt kapjuk, hogy

$$\underline{0} = (y_1 - z_1) \underline{a}_1 + (y_2 - z_2) \underline{a}_2 + \ldots + (y_r - z_r) \underline{a}_r .$$

Mivel a kiválasztott $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_r$ vektorok lineárisan függetlenek, a nullvektort ezek csak a triviális módon állitják elő, vagyis

$$y_1 - z_1 = y_2 - z_2 = \ldots = y_r - z_r = 0,$$

azaz

$$y_1 = z_1, \quad y_2 = z_2, \ldots, y_r = z_r.$$

Ez azt jelenti, hogy az $\underline{a}_i$ vektornak az adott feltételek mellett nem lehet két különböző előállitása, amivel tételünk második részét is bebizonyitottuk.

2. Tétel: Egy vektorrendszer rangja akkor és csak akkor nem változik meg, ha olyan vektort veszünk el belőle, vagy adunk hozzá, amely kifejezhető a többi vektor lineáris kombinációjaként.

Bizonyitás: Az állitás helyességét két lépésben láthatjuk be.

a) Először kimutatjuk, ha egy vektorrendszerből olyan vektort veszünk el, amely kifejezhető a többi vektor lineáris kombinációjaként, akkor a vektorrendszer rangja változatlan marad.

Legyen ugyanis az adott

$$\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_r, \underline{a}_{r+1}, \ldots, \underline{a}_k$$

vektorrendszer rangja r és az egyszerüség kedvéért azt is tegyük fel, hogy az első r vektor lineárisan független.

Igy ha az $\underline{a}_{r+1}, \underline{a}_{r+2}, \ldots, \underline{a}_k$ vektorok valamelyikét (amelyek az előző tétel értelmében előállithatók az első r vektor lineáris kombinációjaként) hagyjuk el, a rang nyilván változatlan marad.

Ezért a tételben foglalt állitást elég az első r vektorra nézve megvizsgálni.

Tegyük fel, hogy például az $\underline{a}_1$ kifejezhető a többi vektor lineáris kombinációjaként, azaz

$$\underline{a}_1 = x_2 \underline{a}_2 + \ldots + x_r \underline{a}_r + \ldots + x_k \underline{a}_k.$$

Ezek után azt kell kimutatni, hogy az

$$\underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_r, \ldots, \underline{a}_k$$

maradékrendszer rangja is r, vagyis a rang nem változott. Itt is indirekt módon bizonyitunk.

Feltesszük, hogy az uj rendszer rangja r - 1. (A rang ugyanis vagy maradt r, vagy lecsökkent r-1-re.) Ez az előző tétel értelmében azt jelenti, hogy az

$$\underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_r, \ldots, \underline{a}_k$$

vektorrendszer minden vektora előállitható a rendszer r-1 független vektorának lineáris kombinációjaként.

Tekintsük az

$$\underline{a}_2, \underline{a}_3, \ldots, \underline{a}_r$$

r-1 független vektort, akkor a maradékrendszer vektorait előállitó lineáris kombinációk:

$$\underline{a}_2 = 1 \cdot \underline{a}_2 + 0 \cdot \underline{a}_3 + \ldots + 0 \cdot \underline{a}_r$$
$$\vdots$$
$$\underline{a}_r = 0 \cdot \underline{a}_2 + 0 \cdot \underline{a}_3 + \ldots + 1 \cdot \underline{a}_r$$
$$\underline{a}_{r+1} = s_2 \underline{a}_2 + s_3 \underline{a}_3 + \ldots + s_r \underline{a}_r$$
$$\vdots$$
$$\underline{a}_k = y_2 \underline{a}_2 + y_3 \underline{a}_3 + \ldots + y_r \underline{a}_r$$

Ebből viszont az következik, hogy

$$\underline{a}_1 = x_2\left[1 \cdot \underline{a}_2 + 0 \cdot \underline{a}_3 + \ldots + 0 \cdot \underline{a}_r\right] + \ldots + x_r\left[0 \cdot \underline{a}_2 + 0 \cdot \underline{a}_3 + \ldots + 1 \cdot \underline{a}_r\right] +$$

$$+ x_{r+1}\left[s_2 \underline{a}_2 + s_3 \underline{a}_3 + \ldots + s_r \underline{a}_r\right] + \ldots + x_k\left[y_2 \underline{a}_2 + y_3 \underline{a}_3 + \ldots + y_r \underline{a}_r\right],$$

ahonnan egyszerü átalakitással nyerhetjük az

$$\underline{a}_1 = (x_2 + x_{r+1} s_2 + \ldots + x_k y_2)\, \underline{a}_2 + (x_3 + x_{r+1} s_3 + \ldots + x_k y_3)\, \underline{a}_3 + \ldots +$$

$$+ (x_r + x_{r+1} s_r + \ldots + x_k y_r)\, \underline{a}_r$$

egyenlőséget. Ez azt jelenti, hogy az $\underline{a}_1$-et is ki lehet fejezni az $\underline{a}_2, \underline{a}_3, \ldots, \underline{a}_r$ vektorok lineáris kombinációjaként, ami ellentétben áll azzal a feltevésünkkel, hogy az

$$\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_r$$

vektorok, lineárisan független rendszert alkotnak.

Mivel ellentmondáshoz jutottunk, kiinduló feltételünk helytelen volt, tehát ellenkezője igaz, vagyis ha $\underline{a}_1$ előállitható, akkor annak elhagyása után a maradékrendszer rangja megegyezik az eredeti vektorok rangjával.

b) A bizonyitás második részében könnyen belátható az is, hogy ha az

$$\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_r, \ldots, \underline{a}_k$$

vektorrendszerből $\underline{a}_1$ vektort elhagyva az

$$\underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_r, \ldots, \underline{a}_k$$

maradékrendszer rangja <u>nem változik</u>, akkor az $\underline{a}_1$ előállitható a többi lineáris kombinációjaként.

Legyen ugyanis adva az

$$\underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_r, \ldots, \underline{a}_k$$

vektorrendszer, amelynek a rangja r, továbbá az

$$\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_r, \ldots, \underline{a}_k$$

un. bővitett vektorrendszer, amelynek a rangja ugyancsak r.

Ha az

$$\underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_r, \ldots, \underline{a}_k$$

vektorrendszerben történetesen az

$$\underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_r, \underline{a}_{r+1}$$

független rendszert képez, akkor ezek az

$$\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_r, \ldots, \underline{a}_k$$

rendszerben is függetlenek. Mivel pedig az uj rendszer rangja is r, ezért az 1. rang tétel értelmében az $\underline{a}_1$ vektor is felirható az

$$\underline{a}_2, \dots, \underline{a}_{r+1}$$

vektorok lineáris kombinációjaként, ami éppen azt jelenti, hogy ha a maradékrendszer rangja megegyezik az eredeti rendszer rangjával, akkor az elhagyott vektor kifejezhető a többi lineáris kombinációjával.

Az elmondottak egyben azt is bizonyitják, ha egy vektorrendszerhez olyan vektort csatolunk, amely kifejezhető a többi vektor lineáris kombinációjaként, akkor a vektorrendszer rangja változatlan marad.

Következmény: Ha az

$$\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_k$$

vektorrendszer vektorai mind előállithatók a

$$\underline{b}_1, \underline{b}_2, \dots, \underline{b}_p$$

vektorrendszer vektorainak lineáris kombinációjaként, akkor az $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_k$ rendszer rangja legfeljebb p.

Bizonyitás:

Tekintsük ugyanis az

$$\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_k, \underline{b}_1, \underline{b}_2, \dots, \underline{b}_p$$

bővitett rendszert. Ennek rangja nyilván nem lehet kisebb mint az $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_k$ rendszer rangja. Ha viszont a bővitett rendszerből egymásután elhagyjuk az $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_k$ vektorokat, akkor a 2. rangtétel értelmében a rang változatlan marad. Igy a bővitett rendszer rangja megegyezik a $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \dots, \underline{b}_p$ rendszer rangjával. S mivel ez utóbbi legfeljebb p, nyilvánvaló állitásunk helyessége.

2.4. Dimenzió és bázis

Az eddigiek során a lineáris függetlenség problémáit csupán a vektorrendszerekre vizsgáltuk. A továbbiakban ezt a vizsgálatot kiterjesztjük az egész lineáris térre, amelyben a vektorrendszerek csak részhalmazt képeznek.

A lineáris térben a vektorrendszerrel kapcsolatban értelmezett rang szerepét a dimenzió veszi át.

Egy adott lineáris teret n-dimenziósnak nevezünk, ha abban található n lineárisan független vektor, de bárhogyan is választunk ki belőle n + 1 vektort, azok mindig lineárisan függő rendszert alkotnak.

Mivel az altér is lineáris tér, a dimenzió fenti definiciója arra is érvényes.

A legkisebb dimenzióju lineáris tér a zérusaltér. Ebben az altérben nem vehető fel lineárisan független vektor, amit ugy is mondhatunk, hogy zérus számu független vektor található benne. Igy a zérusaltér dimenzióját 0-nak tekintjük. Tárgyalásainkban a zérusaltérnek a későbbiekben nem lesz szerepe.

Számunkra azok a lineáris terek fontosak, amelyeknek dimenziója természetes szám. Megjegyezzük azonban, hogy a lineáris terek elmélete kiterjed a végtelen dimenzióju lineáris terekre is, de mi ezekkel nem foglalkozunk.

A "dimenzió" kifejezés, geometriából, ill. fizikából már ismert, itt azonban értelmezése általánosabb.

A dimenzió egyébként a lineáris terek legfontosabb adata.

A dimenzió fogalmához szorosan kapcsolódik a bázis fogalma.

Az n-dimenziós lineáris tér bármely, n lineárisan független vektorból álló vektorrendszerét e tér bázisának nevezzük. A bázis vektorait bázisvektoroknak hivjuk.

Ennek alapján bárhogyan is veszünk fel az n-dimenziós lineáris térben n lineárisan független vektort, azok bázist alkotnak ebben a térben. Az elnevezés a bázis alapvető tulajdonságára utal.

1. Tétel: A lineáris tér bármelyik vektora kifejezhető a bázisvektorok lineáris kombinációjaként, méghozzá egyértelmüen.

Bizonyitás: tegyük fel, hogy a

$$\underline{b}_1,\ \underline{b}_2,\ \ldots,\ \underline{b}_n$$

vektorok bázist alkotnak az adott lineáris térben, a $\underline{c}$ vektor pedig ugyanennek a térnek egy tetszőleges vektora. Ilyen feltételek mellett a

$$\underline{b}_1,\ \underline{b}_2,\ \ldots,\ \underline{b}_n,\ \underline{c}$$

n + 1 vektorból álló vektorrendszer "rangja" n (a $\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_n$ vektorok ugyanis lineárisan függetlenek, hiszen bázist képeznek, s az adott térben n-nél több lineárisan független vektor nem vehető fel). Igy az első rangtétel értelmében a $\underline{c}$ vektor kifejezhető a $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_n$ vektorok lineáris kombinációjaként, mégpedig egyértelmüen. Ezek szerint

$$\underline{c} = x_1 \underline{b}_1 + x_2 \underline{b}_2 + \dots + x_n \underline{b}_n,$$

ahol az $x_1, x_2, \dots, x_n$ skalárok egyértelmüen meghatározottak.

Megjegyzés: A

$$\underline{c} = x_1 \underline{b}_1 + x_2 \underline{b}_2 + \dots + x_n \underline{b}_n$$

lineáris kombinációban az

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

skalárokat a $\underline{c}$ vektornak a

$$\underline{b}_1, \underline{b}_2, \dots, \underline{b}_n$$

bázisvektorokra vonatkozó koordinátáinak nevezzük.

Ezek után irányitsuk figyelmünket az n-elemü vektorok terének ez uj szempont szerinti vizsgálatára.

2. Tétel: Az n-elemü vektorok tere n-dimenziós.

Bizonyitás: Először is azt mutatjuk meg, hogy az n-elemü vektorok közül ki tudunk választani n lineárisan független vektort. E végből tekintsük az n-edrendü egységvektorokat:

$$\underline{e}_1 = [1, 0, \dots, 0]^*$$

$$\underline{e}_2 = [0, 1, \dots, 0]^*$$

$$\vdots$$

$$\underline{e}_n = [0, 0, \dots, 1]^*.$$

A belőlük képzett

$$x_1 \underline{e}_1 + x_2 \underline{e}_2 + \dots + x_n \underline{e}_n = \underline{0}$$

egyenlet csakis triviális módon oldható meg. Ez az

$$x_1 \underline{e}_1 + x_2 \underline{e}_2 + \dots + x_n \underline{e}_n = [x_1, x_2, \dots, x_n]^* = \underline{x}$$

összefüggés alapján könnyen belátható. Az előbbi egyenlet ugyanis ilyen jelölésmód mellett

$$\underline{x} = \underline{o}$$

alakban is felirható, ami éppen azt jelenti, hogy valóban csak a triviális megoldás létezik, vagyis az n-elemü egységvektorok lineárisan független rendszert alkotnak.

Ez egyszersmind azt is jelenti, hogy az n-elemü vektorok tere legalább n-dimenziós.

Másrészt viszont bármely n-elemü vektor felirható az n-elemü egységvektorok lineáris kombinációjaként.

Legyen pl.

$$\underline{y} = [y_1, y_2, \ldots, y_n]^*$$

egy tetszőleges n-elemü vektor. A müveleti szabályokból folyik, hogy

$$\underline{y} = y_1 \underline{e}_1 + y_2 \underline{e}_2 + \ldots + y_n \underline{e}_n,$$

vagyis az $\underline{y}$ valóban felirható, mint az egység vektorok lineáris kombinációja.

Ezek után vegyük az

$$\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_k$$

n-elemü vektoroknak egy olyan rendszerét, amelyben a k egy tetszőlegesen nagyra választható természetes szám. Mivel mindezek a vektorok kifejezhetők mint az egységvektorok lineáris kombinációi, az $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_k$ vektorrendszer rangja legfeljebb n.

Ebből következik, hogy az n-elemü vektorok terében n-nél több lineárisan független vektort nem lehet kiválasztani. Az n-elemü vektorok tere tehát valóban n-dimenziós.

Következmény: Az $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n$ egységvektorok bázist alkotnak az L_n-ben.

Például az

$$\underline{e}_1 = [1, 0]^* \text{ és } \underline{e}_2 = [0, 1]^*$$

vektorok bázisát képezik az L_2 lineáris térnek, azaz ezen vektorok lineáris kombinációjaként minden két elemü vektor előállitható. Igy az

$$5\,\underline{e}_1 + 12\,\underline{e}_3$$

lineáris kombináció az $[5,\ 12]^*$ vektort állitja elő.

Megjegyzések: a) Az egységvektorokból képzett bázisra jellemző, hogy a reá vonatkozó koordináták megegyeznek a kérdéses vektor komponenseivel. E szerint az

$$\underline{a} = [a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n]^*$$

kifejezés valójában rövid irásmódja az

$$a_1\,\underline{e}_1 + a_2\,\underline{e}_2 + \ldots + a_n\,\underline{e}_n$$

lineáris kombinációnak.

b) Az elmondottak alapján az egységvektorok által meghatározott bázist triviális bázisnak is szoktuk nevezni.

Valamely altér dimenziójának meghatározásához, az alteret generáló vektorrendszer vizsgálatából indulunk ki.

3. Tétel: Az $\underline{a}_1,\ \underline{a}_2,\ \ldots,\ \underline{a}_k$ vektorrendszer által generált altér dimenziója megegyezik a vektorrendszer rangjával.

Bizonyitás: Mivel a vektorrendszer minden vektora benne fekszik a kérdéses altérben, következik, hogy az altér dimenziója legalább akkora, mint a rang. De az altér minden vektora előállitható, az alteret generáló vektorok lineáris kombinációjaként, amiből viszont következik, hogy a kérdéses dimenzió legfeljebb akkora, mint a rang. E két tény pedig egyidejüleg csak akkor állhat fenn, ha az alteret generáló vektorrendszer rangja megegyezik az altér dimenziójával.

2.5. Mátrixok rangja

Az eddigiekben az

$$L' = \{\underline{s} \mid \underline{s} = \underline{A}\,\underline{x}\} \quad \text{és} \quad L'' = \{\underline{r} \mid \underline{r}^* = \underline{y}^*\underline{A}\}$$

alterekről volt szó, ahol L' valamely adott $\underline{A}$ mátrix oszlopvektorterét, L'' pedig sorvektorterét jelölte. Mivel a lineáris térnek s igy az altérnek is legfontosabb jellemzője a dimenzió, vizsgáljuk meg, milyen kapcsolat van a két altér dimenziója között.

1. Tétel: Az oszlopvektortér és a sorvektortér dimenziója bármely adott $\underline{A}$ mátrixra nézve megegyezik.

Bizonyitás: Legyen az $\underline{A}$ olyan n.k tipusu mátrix, amelynél az oszlopvektortér dimenziója r_1, a sorvektortér dimenziója meg r_2. Az előző pont utolsó tétele alapján tudjuk, hogy az r_1 egyuttal az oszlopvektorokból alkotott vektorrendszer rangját, az r_2 pedig a sorvektorokból alkotott vektorrendszer rangját is jelenti. Ezért

$$r_1 \leqq k$$

és

$$r_2 \leqq n.$$

Ha az oszlopvektorokból alkotott vektorrendszer rangja r_1, akkor az $\underline{A}$ oszlopvektoraiból ki tudunk választani r_1 lineáris független vektort, amelyek egyben bázist alkotnak az oszlopvektortérben. A belőlük felépithető $n.r_1$ tipusu mátrixot jelöljük $\underline{B}_1$-gyel. Az első rangtételből következik, hogy az $\underline{A}$ minden oszlopvektora előállitható a $\underline{B}_1$ mátrix oszlopvektorainak lineáris kombinációjaként. Igy, ha az $\underline{A}$ oszlopvektorait az $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_k$ szimbólumokkal jelöljük, akkor

$$\underline{a}_1 = \underline{B}_1 \cdot \underline{x}_1$$

$$\underline{a}_2 = \underline{B}_1 \cdot \underline{x}_2$$

$$\vdots$$

$$\underline{a}_k = \underline{B}_1 \cdot \underline{x}_k,$$

ahol az $\underline{x}_i$ komponensei az $\underline{a}_i$ vektornak a $\underline{B}_1$ által meghatározott bázisra vonatkozó koordinátáit jelentik. $(i = 1, 2, \dots, k)$

Ennek megfelelően

$$\underline{A} = \left[\underline{B}_1\, \underline{x}_1,\ \underline{B}_1\, \underline{x}_2,\ \dots,\ \underline{B}_1\, \underline{x}_k\right].$$

A mátrixok szorzatával kapcsolatos 2. tétel alapján a

$$\left[\underline{B}_1 \underline{x}_1, \underline{B}_1 \underline{x}_2, \ldots, \underline{B}_1 \underline{x}_k \right] = \underline{B}_1 \left[\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_n \right]$$

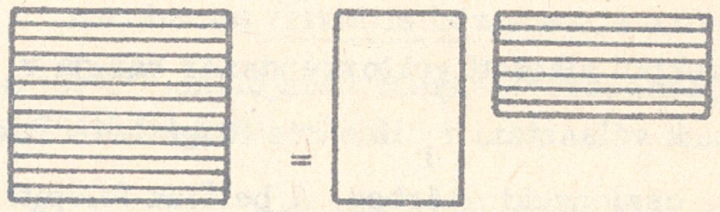
szorzattal. Ha az

$$\left[\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_k \right] = \underline{B}_2$$

jelölést alkalmazzuk, akkor

$$\underline{A} = \underline{B}_1 \cdot \underline{B}_2$$

alakban is irható, ahol $\underline{B}_2$ $(r_1 \cdot k)$ tipusu. Az $\underline{A} = \underline{B}_1 \cdot \underline{B}_2$ összefüggés azonban a szorzatra tanult 3. tétel alapján ugyis értelmezhető, hogy az $\underline{A}$ sorvektorai előállithatók a $\underline{B}_2$ sorvektorainak lineáris kombinációjaként.



$$\underset{(n.k)}{\underline{A}} = \underset{(n.r_1)}{\underline{B}_1} \cdot \underset{(r_1 \cdot k)}{\underline{B}_2}$$

Ez azt is jelenti, hogy az $\underline{A}$ sorvektortere megegyezik a $\underline{B}_2$ sorvektorterével, amelynek dimenziója viszont nem lehet nagyobb sorvektorainak számánál az r_1-nél. Igy az $\underline{A}$ sorvektorterének dimenziója legfeljebb r_1 vagyis az elmondottak értelmében érvényes az

$$r_2 \leqq r_1$$

reláció.

Az $\underline{A}$ transzponálása után a fenti gondolatmenetet megismételve arra az eredményre jutunk, hogy az $\underline{A}$ oszlopvektorterének dimenziója legfeljebb r_2, vagyis

$$r_1 \leqq r_2.$$

A fenti két egyenlőtlenség azonban csak ugy állhat fenn egyidejüleg, ha

$$r_1 = r_2.$$

Ezzel állitásunkat bebizonyitottuk.

Az $\underline{A}$ mátrix sorvektorterének ill. oszlopvektorterének dimenzióját meghatározó számot a mátrix rangjának nevezzük, s a

$$\varrho(\underline{A})$$

szimbólummal jelöljük, amelyet igy olvasunk: "ró $\underline{A}$".
Tekintsük pl. a következő mátrixot:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 12 \end{bmatrix}$$, amelyben az $\underline{e}_1$ és e_2

egységvektorok lineárisan függetlenek és az $[5,\ 12]^*$ ezek lineáris kombinációja, mégpedig: $5\,\underline{e}_1 + 12\,\underline{e}_2$. Igy $\varrho(\underline{A}) = 2$.

Megjegyzések: a) Az $\underline{A}$ mátrix rangja megegyezik az oszlopvektoraiból, ill. sorvektoraiból alkotott vektorrendszerek rangjával.

b) Az $\underline{A}$ rangja nem haladhatja meg sem a sorvektorok számát, sem az oszlopvektorok számát.

A kvadratikus mátrixokat a rang szempontjából két csoportba szoktuk sorolni: szinguláris és nem-szinguláris mátrixok csoportjába.

Ha egy kvadratikus mátrix rangja kisebb, mint sorainak (ill. oszlopainak) száma, akkor a mátrixot szinguláris mátrixnak, ellenkező esetben pedig nem-szinguláris mátrixnak nevezzük.

Például: Tekintsük az

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \underline{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$ mátrixokat.

Az $\underline{A}$ mátrix szinguláris, mert $\varrho(\underline{A}) = 1$, mivel a nullvektor nem szerepelhet a független vektorok közt. A $\underline{B}$ mátrix viszont nem-szinguláris, mert kimutatható, hogy $\varrho(\underline{B}) = 2$, ami megegyezik a sorok számával.

2.6. Az euklideszi tér

Az L_n lineáris teret, mint bizonyos követelményeknek eleget tevő elemek halmazát definiáltuk. A következőkben megvizsgáljuk a mérés lehetőségét is e lineáris térben.

Mivel a geometriai értelemben vett mérés a távolság és szög segitségével történik, a lineáris térben való "méréshez" is ezeket a fogalmakat értelmezzük. E fogalmaknak a lineáris térbe való átültetésénél természetesen el kell tekintenünk a közvetlen fizikai szemlélettől. (Ez csupán $n \leqq 3$ esetén adódhat.) A meghatározásoknak azonban olyanoknak kell lennie, hogy az elemi geometriai fogalmakat speciális esetként magukba foglalják.

Ahhoz, hogy a lineáris térben távolságról beszélhessünk a pontot is értelmeznünk kell. Az egy-, kettő- és három elemü vektorokat már kapcsolatba hoztuk az elemi geometriai ponttal. Most ezt általánositjuk és

a lineáris tér pontjain, a lineáris tér vektorait értjük.

Ezért a következőkben a pont és a vektor fogalmát egyenértékü fogalmaknak tekintjük. Ezek szerint a

$$\underline{a} = [a_1, a_2, \dots, a_n]^*$$

vektor az L_n egyik pontja. Ha $n > 3$, akkor az uj pontfogalomnak természetesen nem tudunk szemléletes értelmet tulajdonitani.

Ezek után definiáljuk két pont távolságát a lineáris térben.

Ha $\underline{a}$ és $\underline{b}$ ugyanannak az L_n lineáris térnek egy-egy vektora, akkor az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok távolságán azt a d szimbólummal jelölt nem-negativ valós számot értjük, amelyet

$$d = \sqrt{(\underline{a} - \underline{b})^* (\underline{a} - \underline{b})}$$

formula alapján számitunk ki.

Ha tehát

$$\underline{a} = [a_1, a_2, \dots, a_n]^*$$

és

$$\underline{b} = [b_1, b_2, \dots, b_n]^*$$

akkor

$$d = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + \ldots + (a_n - b_n)^2}\ .$$

Vegyük észre, hogy a két elemü vektorok terében formulánk éppen a két pont távolságának meghatározására szolgáló ismert összefüggést adja.
Igy

$$\underline{a} = [11,\ 8]^* \quad \text{és} \quad \underline{b} = [3,\ 2]^*$$

vektorok esetén

$$\underline{d} = \sqrt{(11 - 3)^2 + (8 - 2)^2} = 10$$

a pontok távolsága.

Egy vektornak a nullvektortól való távolságával definiáljuk a vektor hosszát.

Valamely adott $\underline{a}$ vektor hosszán (vagy abszolut értékén) azt az $|\underline{a}|$ szimbólummal jelölt nem-negativ valós számot értjük, amelyet az

$$|\underline{a}| = \sqrt{\underline{a}^* \cdot \underline{a}}$$

formula alapján határozunk meg.

Ha

$$\underline{a} = [a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n]^*,$$

akkor

$$|\underline{a}| = \sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2}\ .$$

Legyen pl. $\underline{a} = [3,\ 4]^*$ akkor $|\underline{a}| = \sqrt{25} = 5$. Ennek megfelelően az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok távolságát jelölő d skalár igy is irható

$$d = |\underline{a} - \underline{b}|\ .$$

Ha az $\underline{a}$ két elemü vektor, akkor az $|\underline{a}|$ szimbólum az analitikus geometriában szerzett ismeretek szerint nem más, mint az $\underline{a}$ vektornak megfelelő pont távolsága az origótól. Ez a magyarázata annak, hogy n = 2, n = 3 esetén szokás a vektorokhoz rendelt pontot egy irányitott egyenes segitségével az origóval összekötni:

$$|\underline{r}|^2 + |\underline{s}|^2 + 2\,(|\underline{r}| \cdot |\underline{s}|) \geqq |\underline{r}|^2 + |\underline{s}|^2 + 2\,(\underline{r}^* \cdot \underline{s})$$

alakra hozható, amelyből egyszerü átalakitással nyerjük az

$$|\underline{r}| \cdot |\underline{s}| \geqq \underline{r}^* \underline{s}$$

összefüggést. Mivel okoskodásunk minden lépése, amellyel ez utóbbi relációhoz jutottunk, megfordítható, azért

$$|\underline{a} - \underline{b}| + |\underline{b} - \underline{c}| \geqq |\underline{a} - \underline{c}|$$

egyenlőtlenség ekvivalens, az

$$|\underline{r}| \cdot |\underline{s}| \geqq \underline{r}^* \cdot \underline{s}$$

egyenlőtlenséggel. Igy ennek bizonyitása egyszersmind annak bizonyitását is jelenti, hogy távolságfogalmunkra érvényes a háromszögegyenlőtlenség.

A bizonyitásnál azt a tényt használjuk fel, hogy bármely λ skalár mellett igaz, hogy

$$(\underline{r} - \lambda \underline{s})^* (\underline{r} - \lambda \underline{s}) \geqq 0,$$

hiszen az $\underline{r} - \lambda \underline{s}$ kifejezés egy vektort jelent, és egy vektornak önmagával alkotott skaláris szorzata nem lehet negativ. Sőt azt is tudjuk, hogy az egyenlőtlenség csak akkor válik egyenlőséggé, ha $\underline{r} - \lambda \underline{s} = \underline{0}$, azaz $\underline{r} = \lambda \underline{s}$.

Mivel pedig

$$(\underline{r} - \lambda \underline{s})^* (\underline{r} - \lambda \underline{s}) = \underline{r}^* \cdot \underline{r} - \lambda (\underline{s}^* \cdot \underline{r}) - \lambda (\underline{r}^* \underline{s}) + \lambda^2 (\underline{s}^* \cdot \underline{s}) =$$

$$= \underline{r}^* \cdot \underline{r} - 2\lambda (\underline{r}^* \underline{s}) + \lambda^2 \underline{s}^* \underline{s} = |\underline{s}|^2 \cdot \lambda^2 - 2\,(\underline{r}^* \cdot \underline{s})\lambda + |\underline{r}|^2,$$

az $(\underline{r} - \lambda \underline{s})^* (\underline{r} - \lambda \underline{s}) \geqq 0$ egyenlőtlenség igy is felirható:

$$|\underline{s}|^2 \lambda^2 - 2\,(\underline{r}^* \underline{s})\lambda + |\underline{r}|^2 \geqq 0.$$

Ez azt jelenti, hogy a bal oldalon álló, a λ skalárra nézve másodfoku kifejezés negativ értéket nem vehet fel. Ez csak ugy lehetséges, ha ennek a λ-ban másodfoku kifejezésnek a diszkriminánsa negativ vagy zérus.

A diszkrimináns most

$$\left[2\,(\underline{r}^{*}\,\underline{s})\right]^2 - 4\,(|\underline{s}|^2 \cdot |\underline{r}|^2) = 4\,(\underline{r}^{*}\,\underline{s})^2 - 4\,(|\underline{s}|^2 \cdot |\underline{r}|^2) =$$

$$= 4\left[(\underline{r}^{*}\,\underline{s})^2 - (|\underline{s}| \cdot |\underline{r}|)^2\right]$$

alaku.

Ez pedig akkor nem pozitiv, ha a szögletes zárójelben nem-pozitiv szám áll, vagyis

$$(|\underline{r}| \cdot |\underline{s}|)^2 \geqq (\underline{r}^{*}\,\underline{s})^2.$$

A kapott, un. Cauchy-féle egyenlőtlenségből már következik a vizsgált állitás helyessége.

Az L_n-ben értelmezett távolságfogalom tehát eleget tesz a távolság fogalmával szemben támasztott követelményeknek.

A mérés lehetőségének teljessé tételéhez meg kell adnunk még az L_n-ben értelmezett szög fogalmát is. Ezzel kapcsolatban először a sugarat definiáljuk.

Az $\underline{a} \neq \underline{0}$ vektorhoz tartozó sugáron mindazon

$$\lambda\,\underline{a}$$

alakban kifejezhető pontok halmazát értjük, ahol $\lambda \geqq 0$.

A két dimenziós lineáris térben egy adott ponthoz tartozó sugár ezek szerint egy olyan félegyenest jelent, amely az origóból indul ki és átmegy az adott ponton. Az $\underline{a} = \underline{0}$ ponthoz nem tartozik sugár.

Amikor két vektor hajlásszögéről beszélünk, akkor ezen mindig a két vektor által meghatározott sugár hajlásszögét értjük. Az előzőek szerint világos, hogy két vektor hajlásszöge csak akkor van értelmezve, ha egyik sem nullvektor. Ilyen feltételek mellett a következő definiciót adjuk:

Az L_n tér adott $\underline{a} \neq \underline{0}$ és $\underline{b} \neq \underline{0}$ vektorának hajlásszögén azt a φ szöget értjük, amely eleget tesz a

$$\cos\varphi = \frac{\underline{a}^{*} \cdot \underline{b}}{|\underline{a}| \cdot |\underline{b}|}$$

összefüggésnek.

Legyen például

$$\underline{a} = [1,\ -1,\ \ 1,\ 1]^{*}$$

és

$$\underline{b} = [0, \ -2, \ 2, \ -1]^*.$$

Ekkor

$$\cos\varphi = \frac{3}{2.3} = \frac{1}{2}$$

és igy

$$\varphi = 60^\circ + n \ . \ 360^\circ,$$

vagy radiánban kifejezve:

$$\varphi = \frac{\pi}{3} + n \ . \ 2\pi \ .$$

Megjegyzések: a) A trigonometriából tudjuk, hogy bármely φ mellett teljesülnie kell a

$$-1 \leqq \cos\varphi \leqq 1$$

összefüggésnek. Az L_n-ben értelmezett szögfogalom csak akkor jogos, ha arra is fennáll ez a kritérium.
Ennek belátására irjuk fel, az előbb megismert Cauchy-féle egyenlőtlenséget az L_n $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorára, ami szerint

$$(|\underline{a}| \ . \ |\underline{b}|)^2 \geqq (\underline{a}^* \ . \ \underline{b})^2.$$

Ebből

$$1 \geqq \frac{(\underline{a}^* \underline{b})^2}{|\underline{a}|^2 \ . \ |\underline{b}|^2}$$

és igy

$$-1 \leqq \frac{\underline{a}^* \underline{b}}{|\underline{a}| \ . \ |\underline{b}|} \leqq 1.$$

b) Mivel a szögre adott definició a φ értékét nem határozza meg egyértelmüen, megállapodunk abban, hogy a számtalan sok lehetőség közül mindig azt választjuk, amely nem nagyobb a derékszögnél.

c) Ha az L_n $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorára nézve $\cos\varphi = 0$, azaz $\varphi = \frac{\pi}{2}$,

akkor azt mondjuk a két vektor ortogonális. Az ortogonális kifejezést ugyanolyan értelemben használjuk, mint a merőleges kifejezést az elemi geometriában.
Igy, ha pl.

$$\underline{a} = [2,\ 5]^* \quad \text{és} \quad \underline{b} = [5,\ -2]^*,$$

akkor

$$\cos\varphi = \frac{\underline{a}^* \cdot \underline{b}}{|\underline{a}| \cdot |\underline{b}|} = \frac{0}{29} = 0.$$

Az L_n lineáris térben értelmezett távolság és szög fogalmat olyan formulákkal vezettük be, amelyekben minden esetben szerepelt két vektor skaláris szorzata. Ezek szerint a skaláris szorzat felhasználása és annak sajátságai tették lehetővé elemi euklideszi geometriai fogalmak általánositását az n-elemü vektorok körében. Végső soron tehát a skaláris szorzat teremti meg a mérés lehetőségét a lineáris térben.

Az előbbiekben értelmezett "metrikával" ellátott lineáris teret euklideszi térnek nevezzük. Ezt igy is szokták definiálni:

Az L_n lineáris térben értelmezve van a skaláris szorzat, ha bármely két $\underline{a}, \underline{b} \in L_n$ vektorának megfelel egy

$$\underline{a}^* \underline{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n$$

skalár ugy, hogy ez a megfelelés rendelkezik a következő tulajdonságokkal is:

1. $\underline{a}^* \cdot \underline{b} = \underline{b}^* \underline{a}$ (vagyis a skaláris szorzat szimmetrikus)

2. $\underline{a}^* (\lambda \underline{b}) = \lambda (\underline{a}^* \underline{b})$, ahol λ tetszőleges skalár,

3. $(\underline{a}^* + \underline{b}^*)\, \underline{c} = \underline{a}^* \underline{c} + \underline{b}^* \underline{c}$.

4. Egy vektornak önmagával való skaláris szorzata nem-negativ:

$$\underline{a}^* \cdot \underline{a} \geqq 0,$$

s csak akkor nulla, ha $\underline{a} = \underline{0}$.

Az olyan lineáris tereket, amelyekben az 1-4. terjedő feltételeknek eleget tevő skaláris szorzat értelmezve van, euklideszi térnek nevezzük. Az n-elemü vektorok tere tehát euklideszi tér, amit az E_n szimbólummal jelölünk.

Megjegyzések: a) Mivel az euklideszi tér egyben lineáris tér, annak is legjellemzőbb adata a dimenzió. Igy pl. a két elemü vektorok által meghatározott euklideszi tér dimenziója kettő, ami megegyezik a vektoroknak megfelelő elemi geometriai pontok meghatározta sik dimenziójával. Természetesen az E_n dimenziója általánosabb fogalom, mint a geometriában értelmezett dimenzió, ahol ez, $n > 3$ esetén már nincs értelmezve.

b) Az euklideszi térben, a szög fogalmának bevezetése lehetővé teszi, hogy a tér bázisai közt az un. ortogonális bázist is értelmezzük.

Az E_n euklideszi tér valamely bázisát ortogonálisnak nevezzük, ha annak bázisvektorai páronként ortogonálisak.

Ha pl.

$$\underline{b}_1 = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \underline{b}_2 = \begin{bmatrix} -8 \\ 6 \end{bmatrix}$$

akkor $\underline{b}_1$ és $\underline{b}_2$ az E_2 ortogonális bázisát képezi.

c) Ha a páronként ortogonális vektorokból felépitett $\underline{B}$ mátrixra fennáll a

$$\underline{B} \cdot \underline{B}^* = \underline{B}^* \cdot \underline{B} = \underline{E}$$

összefüggés, a $\underline{B}$ mátrixot ortogonális mátrixnak nevezzük. Pl. ha

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} 0,8 & 0,6 \\ -0,6 & 0,8 \end{bmatrix}, \text{ akkor}$$

$$\begin{bmatrix} 0,8 & 0,6 \\ -0,6 & 0,8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,8 & -0,6 \\ 0,6 & 0,8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,8 & -0,6 \\ 0,6 & 0,8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,8 & 0,6 \\ -0,6 & 0,8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2.7. Konvex halmazok

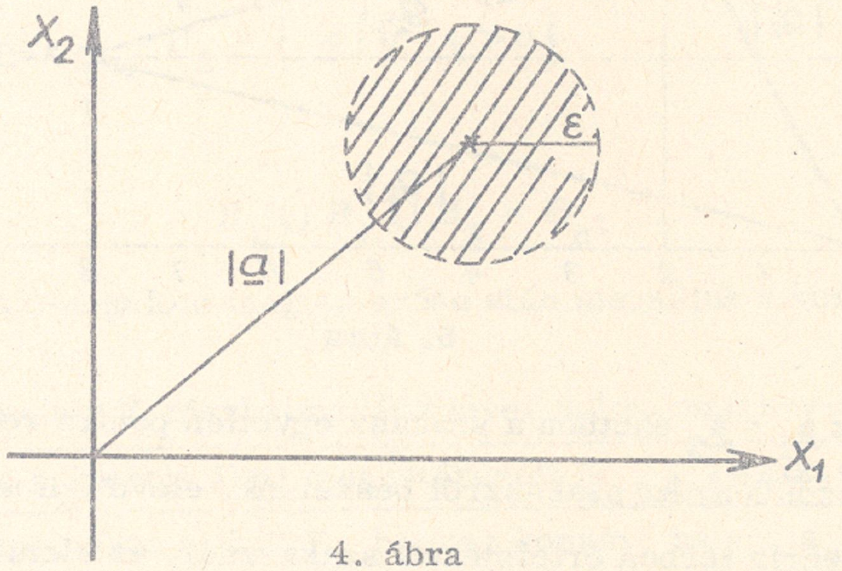
A lineáris algebra gyakorlati alkalmazásainál (igy például az optimumszámitási feladatoknál) fontos szerepet játszanak az E_n, euklideszi tér bizonyos részhalmazai. Mielőtt ezek vizsgálatára rátérnénk, bevezetünk néhány alapfogalmat:

Az $\underline{a} \in E_n$ pont ε sugaru környezetén az E_n mindazon $\underline{x}$ pontjainak halmazát értjük, amelyek eleget tesznek az

$$|\underline{a} - \underline{x}| < \varepsilon$$

követelménynek, ahol az ε tetszőleges pozitiv szám.

Ha az $\underline{a}$ történetesen két elemü vektor, akkor az ε -sugaru környezetét ábrával szemléltethetjük ugy, hogy az $\underline{a}$-nak megfelelő pont körül $\varepsilon > 0$ sugárral kört rajzolunk. A kör belső pontjai képezik az $\underline{a}$ környezetét.



4. ábra

A továbbiakban definiáljuk az egyenes és szakasz fogalmát.

Ha adva van az E_n -ben $\underline{x}_1$ és $\underline{x}_2$ pont, akkor e két pont által meghatározott egyenesen a következő pontok halmazát értjük:

$$X = \left\{ \underline{x} \mid \underline{x} = \lambda \underline{x}_1 + (1 - \lambda) \underline{x}_2 ; \lambda \text{skalár} \right\} .$$

Vagyis a két pont összes olyan lineáris kombinációját, amelyekben a sulyok összege egy, a két pont által meghatározott egyenesnek nevezzük. Könnyen meggyőződhetünk arról, hogy a két-, illetve háromdimenziós vektorok esetében ez a definició az analitikus geometriában definiált egyenesfogalomhoz vezet.

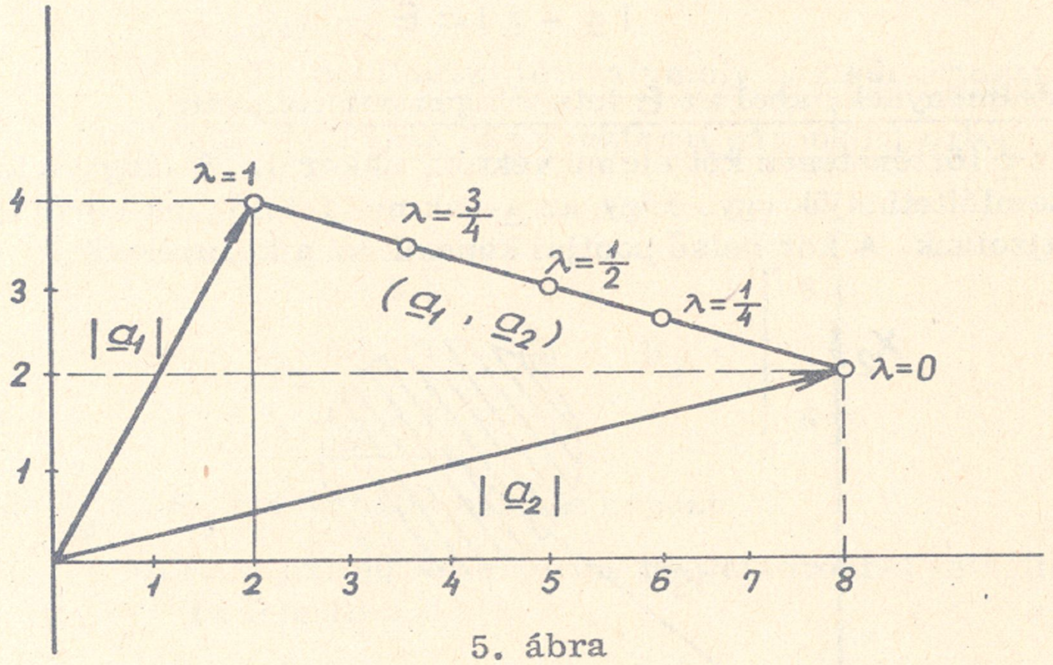
Az E_n euklideszi tér $\underline{a}_1$ és $\underline{a}_2$ pontjai által meghatározott egyenesszakaszon pedig az $\underline{a}_1$ és $\underline{a}_2$ vektorok összes lehetséges konvex lineáris kombinációinak halmazát értjük.

A szakaszra adott definiciót igy foglalhatjuk össze:

$$(\underline{a}_1, \underline{a}_2) = \left\{ \underline{a} \mid \underline{a} = \lambda \underline{a}_1 + (1 - \lambda)\underline{a}_2, \ 0 \leqq \lambda \leqq 1 \right\},$$

ahol $(\underline{a}_1, \underline{a}_2)$ a szakasz fogalmát szimbólizálja.

Az $\underline{a}_1 = [2,\ 4]^*$ és $\underline{a}_2 = [8,\ 2]^*$ pontok által meghatározott szakaszt az alábbi ábra szemlélteti:



5. ábra

Megjegyzés: Az $\underline{a}_1 = \underline{a}_2$ esetben a szakasz egyetlen pontra redukálódik. A következőkben, ha szakaszról beszélünk, eleve feltesszük, hogy $\underline{a}_1 \neq \underline{a}_2$.

Az L_n lineáris térben értelmezett szakasznál, az elemi geometria analógiájára, beszélhetünk a szakasz osztópontjairól is.

Igy

az $\underline{a}_1$ és $\underline{a}_2$ pontok meghatározta $(\underline{a}_1, \underline{a}_2)$ szakasz felező pontja az

$$\frac{1}{2}\underline{a}_1 + \frac{1}{2}\underline{a}_2 = \frac{1}{2}(\underline{a}_1 + \underline{a}_2)$$

vektor.

Bevezetjük még az E_n euklideszi tér un. hipersikjainak fogalmát.

Mindazon $\underline{x} \in E_n$ pontok összességét, amelyekre a

$$\underline{c}^* \underline{x} = b$$

feltétel teljesül, ahol a $\underline{c}^* \neq \underline{0}$ és a $[c_1, c_2, \dots, c_n]$, b számértékek adottak az E_n euklideszi tér hipersíkjának nevezzük.

A feltételekből látható, hogy az $\underline{x} = \underline{0}$ vektor csak akkor elégítheti ki az egyenletet, ha $b = 0$, vagyis

$$\underline{c}^* \underline{x} = 0.$$

Ez azonban azt jelenti, hogy az adott $\underline{c}^*$ vektor, "merőleges" a hipersík minden vektorára.

A $\underline{c}^* \underline{x} = b$ hipersík az n dimenziós euklideszi teret három diszjunkt halmazra bontja fel. Nevezetesen

$$H_1 = \{ \underline{x} \mid \underline{c}^* \cdot \underline{x} < b \}$$

$$H_2 = \{ \underline{x} \mid \underline{c}^* \underline{x} = b \}$$

$$H_3 = \{ \underline{x} \mid \underline{c}^* \underline{x} > b \}$$

amelyekre

$$H_1 \cup H_2 \cup H_3 = E_n.$$

E néhány alapfogalom megismerése után megadjuk a konvex halmazok definícióját.

Az E_n valamely K részhalmazát konvex halmaznak nevezzük, ha a K bármely $\underline{a}_1$ és $\underline{a}_2$ pontja által meghatározott $(\underline{a}_1, \underline{a}_2)$ szakasz benne fekszik a K halmazban, azaz a $K \subset E_n$ halmaz konvex, ha $\underline{a}_1, \underline{a}_2 \in K$ esetén mindig teljesül az $(\underline{a}_1, \underline{a}_2) \subset K$ kikötés. Egy pontot önmagában is konvex halmaznak nevezünk.

A konvex halmazokkal kapcsolatban beszélhetünk belső pontokról és határpontokról.

Az $\underline{a}$ pontot a K konvex halmaz un. belső pontjának nevezzük, ha találunk olyan $\varepsilon > 0$ sugarat, hogy az $\underline{a}$ pont ε sugaru környezetének minden pontja eleme a halmaznak.

Nyilvánvaló, hogy a halmaz belső pontja feltétlenül hozzátartozik a halmazhoz, annak szükségképpen eleme.

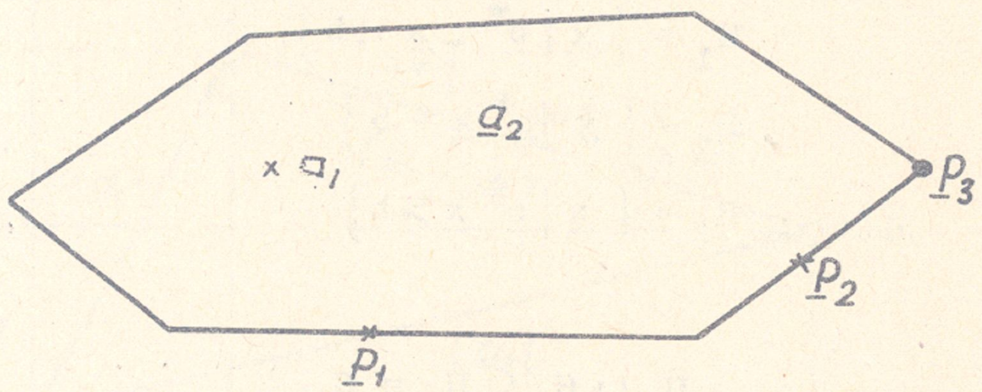
Egy $\underline{b}$ pontot a K konvex halmaz határpontjának nevezünk, ha a pont bármilyen kicsi $\varepsilon > 0$ sugaru környezetének meg van az a tulajdonsága, hogy tartalmaz a K halmazhoz tartozó és annak komplementeréhez tartozó pontokat.

A határpontok nem feltétlenül elemei magának a halmaznak, de tartozhatnak a halmazhoz is. A K konvex halmaz határpontjai között kitüntetett szerepük van az extremális pontoknak.

A K konvex halmazra nézve valamely $\underline{p}$ pontot extremális pontnak nevezzük, ha nincs a K-ban olyan szakasz, amelynek a $\underline{p}$ felező pontja volna.

Az egyetlen pontból álló konvex halmaz egyetlen elemét is extremális pontnak tekintjük.

Példaképpen bemutatjuk, hogy az alábbi ábrán látható hatszög pontjai konvex halmazt alkotnak, ahol az $\underline{a}_1$, és az $\underline{a}_2$ belső pont, a $\underline{p}_1$, a $\underline{p}_2$ és a $\underline{p}_3$ ezzel szemben határpont. A határpontok közül azonban csupán a $\underline{p}_3$ jelent extremális pontot.



6. ábra

Ha a K konvex halmazban kiválasztunk egy $\underline{a}_o$ vektort, aztán képezzük a K minden vektorának és az $\underline{a}_o$ -nak különbségét, olyan vektorhalmazhoz jutunk, amely mindig beágyazható legalább egy altérbe. Jelölje r annak a legkisebb dimenziós altérnek a dimenzióját, amely az S halmazt teljes egészében tartalmazza. k S halmaz értelmezése lehetővé teszi, hogy K jellemzésére is felhasználjuk a dimenzió fogalmát.

A K konvex halmaz r-dimenziós, ha az S-ből ki lehet választani r lineárisan független vektort, de az S bármely r + 1 vektorból álló részhalmaza már lineárisan függő rendszer.

A definició szerint a pont pl. nulldimenziós konvex halmaz, a szakasz pedig egydimenziós.

A K halmazra azt mondjuk, hogy nem-korlátos, ha bármely $\underline{x} \in K$ ponthoz található olyan $\underline{h} \neq \underline{0}$ vektor, hogy az

$$\underline{x} + \lambda \underline{h}$$

pont bármely $\lambda \geqq 0$ mellett eleme a K-nak. Egyébként a K korlátos.

Ennek megfelelően, pl. a szakasz korlátos konvex halmaz, de a sugár már nem.

A konvex halmazokkal kapcsolatban bevezetjük még a konvex poliéder és a konvex kónusz fogalmát.

Egy konvex halmazt konvex poliédernek nevezünk, ha

a) korlátos, továbbá,
b) extremális pontjainak száma véges.

Igy például a szakasz konvex poliéder, de konvex poliéder a háromszög és a kocka is.

A konvex poliéderek extremális pontjait csucspontoknak is szoktuk nevezni.

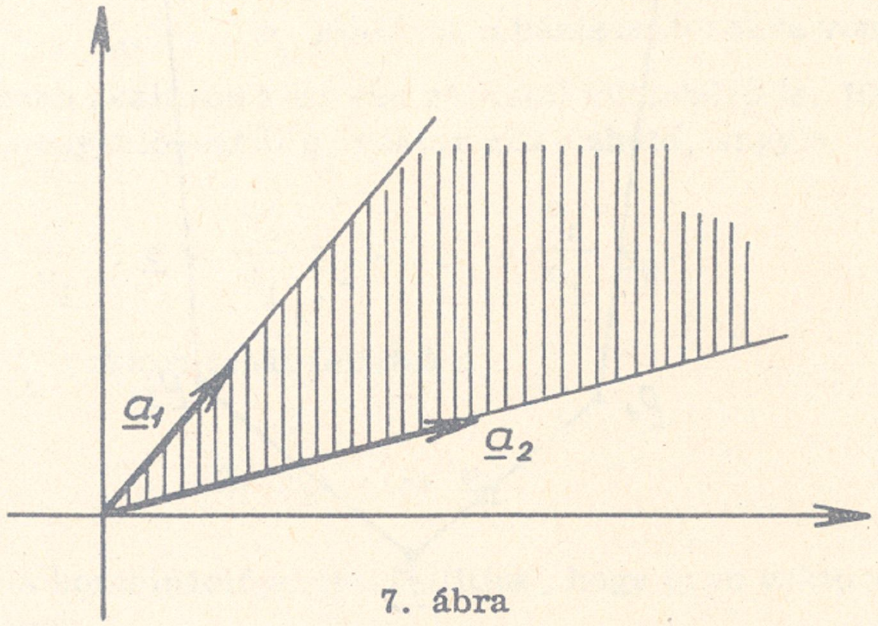
A konvex poliéderek között a legegyszerübbek az un. szimplexek.

Az n-dimenziós szimplex olyan konvex poliéder, amelynek n + 1 csucspontja van.

Ezek szerint a pont nulldimenziós szimplex, a szakasz egy-dimenziós szimplex, a háromszög két-dimenziós szimplex, a tetraéder pedig három-dimenziós szimplex. A magasabb dimenzióju szimplexeknek nincs külön nevük.

Egy C konvex halmazt konvex kónusznak nevezünk, ha C bármely $\underline{a}$ pontjára nézve igaz, hogy a $\lambda\underline{a}$ is pontja a C-nek bármely nem negatív λ esetén.

A konvex kónuszra legegyszerübb példa a $\{\underline{0}\}$, halmaz, ami azonban konvex poliéder is. Ez a kónus egyetlen $\underline{0}$ elemből áll, mert $\lambda \cdot \underline{0} = \underline{0}$ ezért ez a halmaz korlátos halmaz. Ha azonban a C-nek van a $\underline{0}$ vektortól különböző eleme is, akkor a C nem korlátos halmaz. Konvex kónust szemléltet a sikban az alábbi ábra szerint az $\underline{a}_1$ és $\underline{a}_2$ vektorok által meghatározott szögtartomány is.



7. ábra

1. Tétel: A konvex kónusoknak legfeljebb egy csucspontjuk lehet.

Bizonyitás: A definició szerint, ha $\underline{a} \in C$ halmaznak, akkor $\lambda\underline{a} \in C$ állitás is igaz.

Ha már most $\underline{a} \neq \underline{0}$ vektor, akkor az nem lehet extremális pont, mivel felező pontja a $(\underline{0}, 2\underline{a})$ szakasznak.

A tétel szemléltetésére tekintsük az $\underline{a}_1$ és $\underline{a}_2$ n-elemü vektorok nem-negativ lineáris kombinációit. Ezek nyilván konvex kónuszt képeznek mégpedig olyant amelynek a $\underline{0}$ az egyetlen csucspontja. Kételemü vektorok esetén éppen a 7. ábra mutatja e halmaz képét.

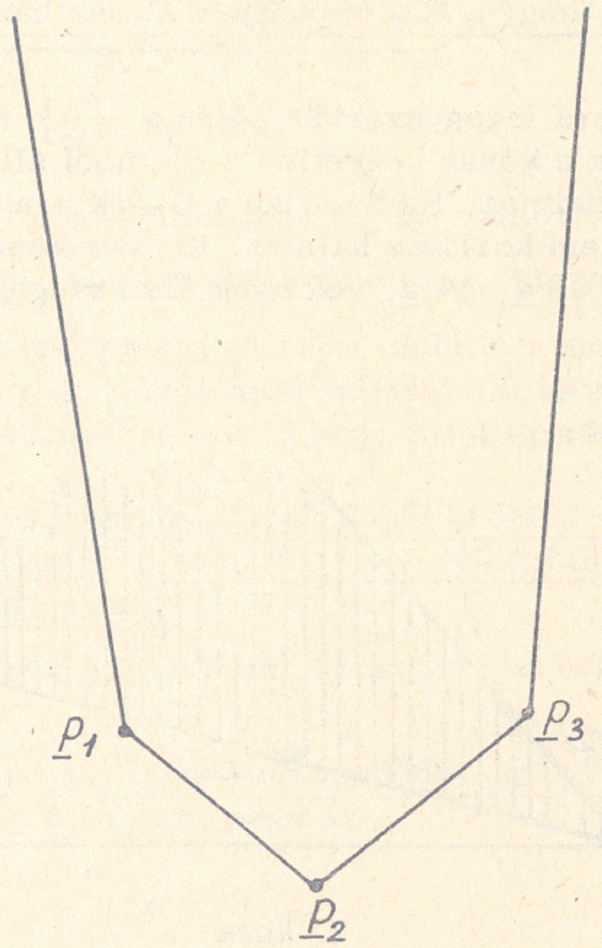
Konvex kónusznak tekinthető az $\underline{a}_1, \underline{a}_2 \in L_n$ vektorok összes lehetséges lineáris kombinációi is. A két-elemü vektorok esetén ez éppen a sik pontjait jelenti. Ebben az esetben a konvex kónusznak nincs extremális pontja.

Ez utóbbi példa alapján megállapithatjuk, hogy nemcsak a zérus-altér tesz eleget a konvex kónusz követelményeinek.

A konvex poliéder és konvex kónusz definiálása után megemlitjük még a poliédrikus halmaz fogalmát, amelyről később éppen az előbbi két halmazzal kapcsolatban lesz szó.

<u>Egy konvex halmazt poliédrikus halmaznak nevezünk, ha annak véges sok csucspontja van.</u>

Például:



8. ábra