Pázmány Péter Katolikus Egyetem
Bölcsészettudományi Kar
Szociológia Intézet

Gazdaságmatematika

Füstös László

Gáspár László
Temesi József

Lineáris programozási gyakorlatok

Tankönyvkiadó, Budapest, 1987

EGYETEMI SEGÉDKÖNYV

Kiadását a művelődési miniszter rendelte el

Bírálták:

BIKICS ISTVÁNNÉ DR.
egyetemi docens

DR. SZIDAROVSZKY FERENC
egyetemi docens, a matematikai tudományok kandidátusa

ISBN 963 17 8748 6

Tartalomjegyzék

12. A módosított szimplex módszer

Ennek a módszernek az ismertetésénél induljunk ki az

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A}\mathbf{x} &\leqq \mathbf{b}, \\
\mathbf{b} &\geqq \mathbf{0}, \\
\mathbf{x} &\geqq \mathbf{0}, \\
z = \mathbf{c}^*\mathbf{x} &\to \max
\end{aligned} \tag{12.1}
$$

alakú normál feladatból, melynek induló táblázata (bármelyikével is oldjuk meg az eddig ismert módszereknek):

	$\mathbf{x}^*$	
$\mathbf{u}$	$\mathbf{A}$	$\mathbf{b}$
$-z$	$\mathbf{c}^*$	0

(12.2)

A fenti normál feladat kanonikus alakja:

$$
[\mathbf{A}, \mathbf{E}] \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} = \mathbf{b},
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}, \quad \mathbf{u} &\geqq \mathbf{0}, \\
z = \mathbf{c}^*\mathbf{x} &\to \max,
\end{aligned}
$$

melyben az együtthatómátrixot az $[\mathbf{A}, \mathbf{E}]$ mátrix adja és a változókat az $[\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*]$ vektor tartalmazza. Írjuk fel ehhez a kanonikus alakú feladathoz — mint primál feladathoz — tartozó induló táblázatot, mely az előbbi táblázat bizonyos fokú kibővítését jelenti:

	$\mathbf{x}^*$	$\mathbf{u}^*$	
$\mathbf{u}$	$\mathbf{A}$	$\mathbf{E}$	$\mathbf{b}$
$-z$	$\mathbf{c}^*$	$\mathbf{0}^*$	0

(12.3)

Vagyis az együtthatómátrixban szerepelnek a bázisváltozóknak megfelelő egységvektorok is. A táblázat első sorának és első oszlopának elemei változók, míg a többi eleme állandó, adott szám, melyek az

$$L_0 = \begin{bmatrix} A & E & b \\ c^* & 0^* & 0 \end{bmatrix}$$

alakban is felírhatók. Az L_0 mátrix oszlopvektorterének triviális bázisát a

$$B_0 = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0^* & 1 \end{bmatrix}$$

mátrix oszlopvektorai alkotják. Eddigi módszereinkkel az adott normál feladatot úgy oldjuk meg, hogy az L_0 mátrix

$$\begin{bmatrix} A \\ c^* \end{bmatrix}$$

blokkjának néhány alkalmasan választott vektorát — elemi bázistranszformációk segítségével — a B_0 bázis megfelelő vektorainak helyére visszük. Ezeket a transzformációkat az eddigiekben a (12.2) induló táblázat segítségével bonyolítottuk le. Természetesen ugyanarra az eredményre jutunk akkor is, ha a (12.3) táblázat alapján végezzük számításainkat. Belátható, hogy ha ennek alapján a szokásos módon programoznánk, akkor a (12.2) alatti táblázathoz viszonyítva sok felesleges munkát végeznénk.

Van azonban olyan módszer — de ez nem azonos az eddig tanultakkal —, mellyel a (12.1) feladat megoldása során általában kevesebbet kell számolnunk, mint ha a feladatot az eddigi módszerekkel oldanánk meg. *Ez a módszer a (12.3) táblázatra épül, és módosított szimplex módszernek nevezzük.* Nézzük most meg, hogy ennek algoritmusa milyen alapokra épül!

Tegyük fel, hogy s elemi bázistranszformáció elvégzése után az L_0 mátrix oszlopvektorterének

$$B_s = \begin{bmatrix} D & 0 \\ d^* & 1 \end{bmatrix}$$

bázisához jutunk! Jelöljük L_s-sel az L_0 mátrix oszlopvektorainak az új bázisra vonatkozó koordinátáit! Ekkor írhatjuk

$$L_0 = B_s L_s,$$

amiből

$$L_s = B_s^{-1} L_0. \tag{12.4}$$

(A B_s mátrix invertálható, mivel kvadratikus, és oszlopvektorai bázisát alkotják a megfelelő lineáris térnek.) Mivel

$$B_s^{-1} = \begin{bmatrix} D^{-1} & 0 \\ -d^*D^{-1} & 1 \end{bmatrix},$$

azért a (12.4) egyenlőség alapján írhatjuk:

$$L_s = \begin{bmatrix} D^{-1} & 0 \\ -d^*D^{-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & E & b \\ c^* & 0^* & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} D^{-1}A & D^{-1} & D^{-1}b \\ c^*-d^*D^{-1}A & -d^*D^{-1} & -d^*D^{-1}b \end{bmatrix}.$$

Így s lépés után a (12.3) táblázat a következőképpen alakul:

	x^*	u^*	
y	$D^{-1}A$	D^{-1}	$D^{-1}b$
$-z$	$c^*-d^*D^{-1}A$	$-d^*D^{-1}$	$-d^*D^{-1}b$

(12.5)

A táblázat első sorában az x_i és u_i változók az eredeti sorrendnek megfelelően vannak, így az $\mathbf{y}$ vektor komponensei részben az $\mathbf{x}$, részben az $\mathbf{u}$ vektor komponensei közül kerülnek ki. Egyszerűen belátható az is, hogy a $[D^{-1}A, D^{-1}]$ mátrixblokkban annyi egységvektor (oszlopvektor) szerepel, amennyi a sorainak száma. A bázisvektorokat is ezek közül választottuk ki.

Az eddigiekben tehát azt határoztuk meg, hogyan alakul a (12.3) táblázatunk s lépés után. Ezt a primál vagy a duál szimplex módszerrel is meg tudjuk határozni elemi bázistranszformációk segítségével úgy, hogy minden egyes lépésnél meghatározzuk a teljes táblázatot. *A módosított szimplex módszernek éppen az az alapgondolata, hogy nem kell minden lépésnél a teljes táblázatot kitölteni, hanem csak azokkal a vektorokkal kell törődni, amelyek a bázisvektorokból alkotott* $\mathbf{B}_s$ *mátrix inverzét adják*. Ezek az $\mathbf{u}^*$ komponenseihez tartozó oszlopvektorok, melyeket a szokásos módon határozunk meg. A táblázat többi elemét pedig a (12.4) egyenlőség alapján számíthatjuk ki. Azonban már most megjegyezzük, hogy azok kiszámítására általában nincs is szükség.

A (12.4) egyenlőségből és még jobban a (12.5) táblázatból kitűnik, hogy *az egyes lépésekkel kapott táblázatok minden blokkja meghatározható a táblázathoz tartozó bázis inverzének és az eredeti (induló) táblázat megfelelő blokkjainak segítségével*. Ezekre a felismerésekre támaszkodva a módosított szimplex módszert a következőképpen alkalmazzuk.

a) Felírjuk a feladat induló táblázatát a (12.3)-nak megfelelően:

	x^*	u^*	
u	A	E	b
$-z$	c^*	0^*	0

b) A c^* vektor pozitív eleme feletti oszlopban a legkisebb keresztmetszetnél választjuk a generáló elemet, és a szokásos módon meghatározzuk az u^* komponenseihez tartozó oszlopvektorokat:

	x^*	u^*	
y		D^{-1}	
		$-d^*D^{-1}$	

c) A (12.5) táblázat alapján meghatározzuk az utolsó oszlop és utolsó sor minden elemét. Amint látható, ezek a D^{-1} és d^*D^{-1} kifejezések ismeretében könnyen kiszámíthatók:

	x^*	u^*	
y		D^{-1}	$D^{-1}b$
$-z$	$c^*-(d^*D^{-1})A$	$-d^*D^{-1}$	$-(d^*D^{-1})b$

d) Ha az így kapott táblázat utolsó sorában nincs pozitív elem, akkor máris az optimális megoldást adó táblázathoz jutottunk. Ha azonban az utolsó sorban van pozitív elem, akkor az egyik pozitív elem feletti oszlopot is meghatározzuk. A gyakorlatban úgy is eljárhatunk, hogy az utolsó sor elemeinek kiszámításakor az első pozitív számnál megállunk, és a számításokat a neki megfelelő oszloppal folytatjuk. A számítógépek általában ezt az elvet követik. Ha a k-adik oszlopról van szó, akkor a kérdéses elemeket a

$$D^{-1}a_k$$

formula szolgáltatja, ahol az a_k az A mátrix k-adik oszlopvektora. Természetesen az is előfordulhat, hogy az u^* vektor komponenseinek megfelelő oszlopok egyikének utolsó eleme lesz pozitív. Ilyenkor az előbbi képlet alkalmazására nincs szükség.

e) Az utolsó három lépést annyiszor megismételjük, amíg olyan táblázathoz nem jutunk, amelynek utolsó sorában nincs pozitív elem, és így a feladat optimális megoldását adja; vagy utolsó sorában van ugyan pozitív elem, de a hozzá tartozó oszlopban nincs pozitív szám, és így kiderül, hogy a feladatnak nincs optimális megoldása. Így véges számú lépésben mindig eljutunk a feladat optimális megoldásához.

A módosított szimplex módszer alkalmazása különösen akkor előnyös, amikor az $\mathbf{A}$ mátrix oszlopainak száma lényegesen több, mint sorainak a száma. Ez a módszer már feltétlenül kevesebb számolást igényel, mint a primál szimplex algoritmus akkor, ha az $\mathbf{A}$ mátrix oszlopainak száma legalább háromszor annyi, mint sorainak száma.

Számítástechnikai szempontból az is előnyt jelent, hogy — az $\mathbf{u}^*$ vektor komponenseihez tartozó oszlopokat leszámítva — a táblázat minden szükséges elemét az eredeti adatokból az aktuális bázis vektoraiból álló mátrix inverzének ($\mathbf{D}^{-1}$) segítségével nyerjük. Így ez a módszer a hiba lehetőségét is nagymértékben csökkenti. Az inverz helyességét könnyen ellenőrizhetjük a

$$\mathbf{D}\mathbf{D}^{-1} = \mathbf{E}$$

összefüggés alapján.

Ezek után oldjuk meg az ismertetett módszerrel a következő feladatot:

$$\begin{aligned}
x_1 \quad\; +3x_3 \quad\; +x_5+\ x_6 &\leqq 16,\\
2x_2+\ x_3+x_4+x_5 \quad\; &\leqq 18,\\
x_1+\ x_2+ \quad\; x_4 \quad +2x_6 &\leqq 20,\\
x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6 &\geqq\ 0,\\
z = (3x_1+x_2+3x_3+7x_4+6x_5+4x_6) &\to \max!
\end{aligned}$$

Először elkészítjük a (12.3)-nak megfelelően a feladat induló táblázatát:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	u_1	u_2	u_3	
u_1	1	0	3	0	1	1	1	0	0	16
u_2	0	2	1	$\boxed{1}$	1	0	0	1	0	18
u_3	1	1	0	1	0	2	0	0	1	20
$-z$	3	1	3	7	6	4	0	0	0	0

Generáló elemet a célsor legnagyobb eleme, a 7-es feletti oszlopban választunk. A szokásos módon csak az u_1, u_2, u_3 változóknak megfelelő oszlopvektorokat határozzuk meg. A táblázat utolsó oszlopát és utolsó sorát a már meghatározott oszlopvektorok segítségével az eredeti adatok felhasználásával számítjuk ki. Így kapjuk a következő táblázatot:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	u_1	u_2	u_3	
u_1	1						1	0	0	16
x_4	0						0	1	0	18
u_3	$\boxed{1}$						0	−1	1	2
$-z$	3	−13	−4	0	−1	4	0	−7	0	−126

Mivel az utolsó sorban van pozitív elem, azért ez még nem az optimális táblázat. A célsor első eleme pozitív, és így a hozzá tartozó oszlopban választunk generáló elemet. De ehhez a táblázat első oszlopát meg kell határoznunk. (A többi oszlopra nincs szükség.) Ezt a $\mathbf{D}^{-1}\mathbf{a}_1$ formula értéke adja, melyet a táblázatba beírtunk, és ott a generáló elemet is jelöltük.

Most bázisba kerül az x_1-nek megfelelő oszlopvektor. Az előbbi eljárást megismételve kapjuk a

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	u_1	u_2	u_3	
u_1					$\boxed{2}$		1	1	−1	14
x_4					1		0	1	0	18
x_1					−1		0	−1	1	2
$-z$	0	−10	−1	0	2	−2	0	−4	−3	−132

táblázatot, melynél a célsor ötödik eleme pozitív. Így csak az ötödik oszlopot kell meghatározni. Az elemi bázistranszformáció elvégzése után a táblázat lényeges blokkjai a következőképpen alakulnak:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	u_1	u_2	u_3	
x_5							$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	7
x_4							$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	11
x_1							$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	9
$-z$	0	−11	−5	0	0	−1	−1	−5	−2	−146

Látható, hogy ez a táblázat már az optimális megoldást adja. Mégpedig a primál feladat optimális megoldása:

$$\mathbf{x}_0^* = [9; 0; 0; 11; 7; 0], \qquad z_0 = 146,$$

és a feladat duálisának optimális megoldása:

$$\mathbf{u}_0^* = [1; 5; 2], \; w_0 = 146.$$

A módosított szimplex módszerrel nemcsak normál, hanem módosított normál és általános alakú feladatok is megoldhatók. Ezek megoldása két fázisban történik. Az *első fázisban* a másodlagos célfüggvény szerint végezzük a programozást mindaddig, amíg vagy egy lehetséges megoldáshoz nem jutunk, vagy ki nem derül, hogy a feladatnak nincs megvalósítható megoldása. A *második fázisra* csak akkor kerül sor, ha az elsőben a feladat egy lehetséges megoldását kaptuk. Utána már az eredeti célfüggvény szerint végezzük a programozást.

Az $^*u_i$ változóhoz tartozó oszlopból még akkor sem választhatunk generáló elemet, ha annak utolsó eleme pozitív. Ugyanis az $^*u_i$ változók értéke a primál feladatnál zérus, míg a duális feladatnál ezek előjelkötetlenek.

Példaképpen oldjuk meg az alábbi módosított normál feladatot!

$$\begin{aligned}
x_1+x_2+x_3+x_5+x_6 &\leqq 30,\\
x_2+2x_3+x_4-x_5+x_6 &\leqq 26,\\
x_1+x_3+x_4 &= 20,\\
x_1+x_2+x_5+x_6 &= 16,\\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 &\geqq 0,\\
z = (4x_1+x_2+3x_3+2x_4+5x_5+2x_6) &\to \max.
\end{aligned}$$

A feladat induló táblázatát a (12.3)-nak megfelelően készítjük el azzal a különbséggel, hogy az eredeti célfüggvény alatt a másodlagos célfüggvényt is szerepeltetjük.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	u_1	u_2	$^*u_3$	$^*u_4$	
u_1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	0	30
u_2	0	1	2	1	−1	1	0	1	0	0	26
$^*u_3$	1	0	1	1	0	0	0	0	1	0	20
$^*u_4$	$\boxed{1}$	1	0	0	1	1	0	0	0	1	16
$-z$	4	1	3	2	5	2	0	0	0	0	0
	2	1	1	1	1	1	0	0	1	1	36

Az ismertetett eljárást a másodlagos célfüggvény szerint végezzük mindaddig, amíg az $*u_3$ és $*u_4$ el nem tűnnek a bázisváltozók közül. Ennek menete a következő két táblázaton nyomon követhető.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	u_1	u_2	$*u_3$	$*u_4$	
u_1			1				1	0	0	—1	14
u_2			2				0	1	0	0	26
$*u_3$			$\boxed{1}$				0	0	1	—1	4
x_1			0				0	0	0	1	16
$-z$	0	—3	3	2	1	—2	0	0	0	—4	—64
	0	—1	1	1	—1	—1	0	0	1	—1	4

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	u_1	u_2	$*u_3$	$*u_4$	
u_1							1	0	—1	0	10
u_2							0	1	—2	2	18
x_3							0	0	1	—1	4
x_1							0	0	0	1	16
$-z$	0	0	0	—1	4	1	0	0	—3	—1	—76
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Amint látható, a táblázat az adott feladatnak egy megvalósítható megoldását adja, mivel az $*u_3$ és $*u_4$ eltűntek a bázisváltozók közül. Így a megoldás első fázisa befejeződött. A második fázisban a másodlagos célfüggvényt elhagyjuk, és az eredeti célfüggvénnyel folytatjuk tovább a programozást. A számítások menetét a következő táblázatok mutatják:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	u_1	u_2	$*u_3$	$*u_4$	
u_1					$\boxed{1}$		1	0	—1	0	10
u_2					1		0	1	—2	2	18
x_3					—1		0	0	1	—1	4
x_1					1		0	0	0	1	16
$-z$	0	0	0	—1	4	1	0	0	—3	—1	—76

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	u_1	u_2	$*u_3$	$*u_4$	
x_5				—1			1	0	—1	0	10
u_2				0			—1	1	—1	2	8
x_3				0			1	0	0	—1	15
x_1				$\boxed{1}$			—1	0	1	1	6
—z	0	—4	0	3	0	—3	—4	0	1	—1	—116

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	u_1	u_2	$*u_3$	$*u_4$	
x_5							0	0	0	1	16
u_2							—1	1	—1	2	8
x_3							1	0	0	—1	14
x_4							—1	0	1	1	6
—z	—3	—4	0	0	0	—3	—1	0	—2	—4	—134

Az utolsó táblázat már a feladat optimális megoldását adja, mely a következő: $\mathbf{x}_1^* = [0; 0; 14; 6; 16; 0]$, $z_0 = 134$.

Az általános alakú feladatokat úgy oldjuk meg, hogy először módosított normál feladatokká alakítjuk őket, és aztán alkalmazzuk rájuk az előbb ismertetett eljárást.

Az eddigi feladatok megoldásánál a módosított szimplex módszert úgy alkalmaztuk, hogy a primál feladat megvalósítható megoldásain keresztül jutottunk el mind a primál, mind a duál feladat optimális megoldásához. Azért ezt a módszert szokás még *módosított primál szimplex módszernek* is nevezni.

Ha egy feladat duáljában normál vagy módosított normál alakú, akkor ennek optimális megoldásához eljuthatunk úgy is, hogy a módosított szimplex módszerrel minden lépésnél a duális feladat egy lehetséges megoldását állítjuk elő. Természetesen ebben az esetben a táblázat egy oszlopa helyett egy alkalmasan választott sorát kell az egyes lépéseknél meghatározni. Ezt az eljárást nevezik még *módosított duál szimplex módszernek is*.

Lehetőség van arra is, hogy az említett két módszert egy feladat megoldásának menetében felváltva alkalmazzuk.

Az alternatív optimumokat itt is hasonlóan kapjuk, mint az előző módszereknél. Csak a táblázat utolsó oszlopát és az alternatív megoldást meghatározó oszlopot kell meghatározni a $\mathbf{D}$ mátrix inverzének segítségével, mivel a táblázat utolsó sora — beleértve a célfüggvény értékét is — nem változik. A degeneráció kezelése is a $\mathbf{D}^{-1}$ alapján történik.

A módosított szimplex módszer az elektronikus számítógépekre is könnyen programozható.

Feladatok

276. Oldja meg a következő normál feladatokat módosított szimplex módszerrel!

a)
$$\begin{aligned} x_1 \quad +2x_3+\ x_4-x_5 &\leqq 12,\\ 3x_1+x_2-\ x_3+2x_4+x_5 &\leqq 14,\\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5 &\geqq\ 0,\\ (6x_1+3x_2+5x_3+4x_4+2x_5) &\to \max, \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 2x_1+\ x_2+x_3+3x_4+\ x_5 &\leqq 10,\\ x_1+3x_2+x_3+2x_4+4x_5 &\leqq 40,\\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5 &\geqq\ 0,\\ (3x_1+3x_2+2x_3+6x_4+8x_5) &\to \max; \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} x_1-x_2+x_3-\ x_4 &\leqq 16,\\ 2x_1+x_2+x_3+3x_4 &\leqq 30,\\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 &\geqq\ 0,\\ (2x_1+x_2+2x_3+x_4) &\to \max; \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} 2x_1+x_2+3x_3 \qquad\quad +\ x_5 \qquad &\leqq\ 8,\\ 3x_1-x_2 \qquad +2x_4+3x_5+4x_6 &\leqq 12,\\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6 &\geqq\ 0,\\ (3x_1-2x_2+3x_3+3x_4+4x_5+5x_6) &\to \max. \end{aligned}$$

277. Oldja meg az alábbi módosított normál feladatokat módosított szimplex módszerrel!

a)
$$\begin{aligned} x_1+2x_2 \qquad -x_4+x_5 &= 14,\\ x_1-\ x_2+3x_3+x_4+x_5 &\leqq 11,\\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5 &\geqq\ 0,\\ (7x_1+3x_2+4x_3+8x_4+2x_5) &\to \max; \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} x_1+3x_2+\ x_3 \qquad +x_5 &= 10,\\ 2x_1+4x_2+2x_3+x_4+x_5 &\leqq 12,\\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5 &\geqq\ 0,\\ (4x_1+x_2+2x_3+x_4-x_5) &\to \max; \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} x_1+2x_2+\ x_3-\ x_4+x_5 &= 14,\\ -x_1-\ x_2+2x_3+2x_4+x_5 &\leqq 18,\\ x_2+\ x_3+\ x_4-x_5 &=\ 8,\\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5 &\geqq\ 0,\\ (7x_1+3x_2+4x_3+2x_4) &\to \max; \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
d)\ x_1 \quad\ + x_3-2x_4-\ x_5 &= 10,\\
x_2-\ x_3+\ x_4+2x_5 &\leqq 12,\\
x_1+x_2+2x_3+3x_4 \qquad &= 16,\\
x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5 &\geqq\ 0,\\
(2x_1+x_2-x_3-x_5) &\to \max.
\end{aligned}
$$

278. Oldja meg a következő általános alakú feladatokat módosított szimplex módszerrel!

$$
\begin{aligned}
a)\ 3x_1+\ x_2+\quad +x_4+2x_5 &\leqq 20,\\
x_1\ +2x_2+2x_3+x_4-\ x_5 &\geqq 15,\\
x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5 &\geqq\ 0,\\
(4x_1+3x_2+2x_3+5x_4+x_5) &\to \max;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b)\ x_1+x_2+2x_3 \qquad + x_5 \qquad &= 18,\\
2x_1+x_2+\ x_3+2x_4+3x_5-x_6 &\geqq 16,\\
x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6 &\geqq\ 0,\\
(x_1+2x_2+4x_3-x_4+2x_5-2x_6) &\to \max;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
c)\ x_1+\ x_2 \qquad -\ x_4+\ x_5 &\leqq 10,\\
2x_2+\ x_3+\ x_4-2x_5 &= 10,\\
x_1+\ x_2+2x_3+3x_4+\ x_5 &\geqq 20,\\
x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5 &\geqq\ 0,\\
(3x_1+2x_2+x_3-2x_4-2x_5) &\to \max;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
d)\ 2x_1-\ x_2-\ x_3+x_4 \qquad +x_6 &\geqq 15,\\
2x_2+\ x_3+x_4+\ x_5-x_6 &= 10,\\
3x_1 \qquad +2x_3+x_4+2x_5+x_6 &\leqq 12,\\
x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6 &\geqq\ 0,\\
(4x_1+2x_2+x_3+x_5-x_6) &\to \max.
\end{aligned}
$$

279. Oldja meg a következő feladatokat módosított szimplex módszerrel!

$$
\begin{aligned}
a)\ x_1+2x_2+x_3-x_4+\ x_5 &\leqq 14,\\
x_1+\ x_2-x_3+x_4+2x_5 &\geqq 16,\\
x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5 &\geqq\ 0,\\
(4x_1+2x_2+x_3+3x_4+6x_5) &\to \min;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b)\ 2x_1+x_2+3x_3 \qquad +4x_5+\ x_6 &= 30,\\
x_1+x_2+2x_3+2x_4+3x_5+4x_6 &\geqq 50,\\
x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6 &\geqq\ 0,\\
(4x_1+6x_3+2x_4+x_5+3x_6) &\to \min;
\end{aligned}
$$

15. A szállítási feladat

A szállítási probléma alapmodellje a következő gazdasági feladat formájában fogalmazható meg.

Adott m különböző tárolóhely, s ezek $t_1, t_2, \ldots, t_m$ egységgel rendelkeznek valamely homogén termékből. Adott n felvevőhely, amelyek $f_1, f_2, \ldots, f_n$ mennyiségeket keresnek a fenti termékből. Ismerjük a termék egységének elszállítási költségét minden tárolóhelyről minden felvevőhelyre. Melyik tárolóhelyről mennyit szállítsunk az egyes felvevőhelyekre, hogy a szállítási összköltség minimális legyen?

Tegyük fel, hogy a tárolt összmennyiség megegyezik az összes igénnyel, azaz

$$\sum_{i=1}^{m} t_i = \sum_{j=1}^{n} f_j .$$

A problémát matematikailag az alábbiak szerint írhatjuk fel. Jelölje x_{ij} azt a mennyiséget, amelyet az i-edik tárolóhelyről a j-edik felvevőhelyre szállítanak, c_{ij} pedig ugyanebben a viszonylatban az egységnyi mennyiség szállítási költségét! Keresendő a

$$z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

lineáris függvény minimuma a következő feltételek mellett:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = t_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = f_j \quad (j = 1, 2, \ldots, n),$$

$$x_{ij} \geqq 0 \quad (\text{minden } i, j \text{ indexpárra}).$$

Látható, hogy ez egy $(m \times n)$ változós lineáris programozási feladat, s így szimplex módszerrel megoldható, a feladat nagy mérete miatt ez viszont nagyon nehézkes. Ugyanakkor a szimplex táblázat speciális szerkezete lehetővé teszi, hogy egy más eljárással, az *ún. disztribúciós módszerrel* oldjuk meg a feladatot.

A disztribúciós eljárás alapját képező tételeket és a különböző definíciók értelmezését egy konkrét példán mutatjuk be. Tegyük fel, hogy három raktárban (R_1, R_2, R_3) rendre 30, 40 és 50 egység terméket tárolnak. Négy felvevőhely (F_1, F_2, F_3, F_4) igénye 20, 16, 42 és 42 egység. Az egyes viszonylatok fajlagos szállítási költségét az alábbi **C** mátrix elemei mutatják:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 8 & 2 & 4 & 7 \\ 7 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 5 & 9 \end{bmatrix}$$

A feladat matematikai modellje:

$$\begin{aligned}
&x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14} &&= 30,\\
&x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24} &&= 40,\\
&x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34} &&= 50,
\end{aligned}$$

- -

$$\begin{aligned}
&x_{11} + x_{21} + x_{31} &&= 20,\\
&x_{12} + x_{22} + x_{32} &&= 16,\\
&x_{13} + x_{23} + x_{33} &&= 42,\\
&x_{14} + x_{24} + x_{34} &&= 42,
\end{aligned}$$

$$x_{ij} \geqq 0, \quad (i = 1, 2, 3; \quad j = 1, 2, 3, 4)$$

$$(8x_{11}+2x_{12}+4x_{13}+7x_{14}+7x_{21}+4x_{22}+3x_{23}+2x_{24}+2x_{31}+5x_{32}+5x_{33}+9x_{34}) \to \min.$$

Az első három egyenlet biztosítja, hogy a tárolt mennyiségek elszállításra kerüljenek, míg a következő négy egyenlet szerepe a felvevőhelyek igényének kielégítése.

Ha az első három egyenletet összeadjuk, és ebből kivonjuk a szaggatott vonal alatti négy egyenlet összegét, akkor zérust kapunk. Ez azt jelenti, hogy a feladat feltételrendszerét alkotó egyenletek közül legalább egy felesleges. Sőt, ennél több is belátható, az, hogy a feltételrendszer bármelyik egyenlete előállítható a többi egyenlet olyan lineáris kombinációjaként, ahol a szorzók mindegyike vagy $+1$, vagy -1. Ebből következik, hogy a feltételrendszer együtthatómátrixának a rangja legfeljebb 6, illetve egy $(m \times n)$-es feladatnál $m+n-1$. Ugyanakkor pl. az x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{21}, x_{31} változók együtthatóiból alkotott oszlopvektorok lineárisan független rendszert alkotnak. Ez viszont azt mutatja, hogy az együtthatómátrix rangja legalább 6, illetve $m+n-1$. Ezekből pedig az következik, hogy *egy $m \cdot n$-es szállítási feladat együtthatómátrixának rangja pontosan $m+n-1$.* Így az adott feladatnál az együtthatómátrix rangja 6.

A fenti szállítási feladat az alábbi táblázatos formában is felírható:

	F_1	F_2	F_3	F_4	
R_1	8	2	4	7	30
R_2	7	4	3	2	40
R_3	2	5	5	9	50
	20	16	42	42	120

A rekeszek jobb alsó sarkában a költségelemek vannak. A szállítási feladat *egy lehetséges bázismegoldása* az előzőek szerint $m+n-1$ elemet tartalmaz. Ezt a lehetséges bázismegoldást előállíthatjuk úgy, hogy kiválasztjuk a táblázat első sorát, és az ebben a sorban levő legkisebb költségelem által meghatározott szállítási viszonylatban elszállítjuk a maximális mennyiséget. Ezzel a szállítással vagy kimerült az első tárolóhely, vagy egy megrendelő igényét teljes egészében kielégítettük. Az ennek megfelelő sort vagy oszlopot töröljük a táblázatból, és a táblázat szélén levő kapacitást vagy igényt csökkentjük az elszállított mennyiséggel. Ha nem a tárolóhely kapacitása merült ki, akkor a sor következő legkisebb elemével ismételjük meg ezt a lépést. Ha a tárolóhelyen nincs már elszállítható termék, akkor a következő sorra lépünk, és ott ismételjük meg az eljárást. Ezeket a lépéseket folytatva úgy jutunk el az utolsó sorba, hogy minden lépésnél legalább egy sort vagy oszlopot töröltünk a táblázatból. Az utolsó szállítással egyszerre merül ki egy sor és egy oszlop kapacitása. Ezt az eljárást *sorminimum-módszernek* nevezzük. A fentiekhez hasonlóan készíthetünk induló táblázatot oszlopminimumok alapján is (oszlopminimum-módszer).

A mi esetünkben az első szállítást az első raktárból a második felvevőhelyre kell irányítani, 16 egységnyi mennyiségben, azaz $x_{12} = 16$. Ekkor még az első raktárból el tudunk szállítani 14 egységet a következő legkisebb költségű helyre: $x_{13} = 14$. Ezután a második sorra lépünk. A végül kialakuló táblázat a következő:

	F_1	F_2	F_3	F_4	
R_1	8	16 / 2	14 / 4	7	30
R_2	7	4	3	40 / 2	40
R_3	20 / 2	5	28 / 5	2 / 9	50
	20	16	42	42	

Egyszerűen belátható, hogy az egyes lépésekkel meghatározott $m+n—1$ darab x_{ij} változóhoz tartozó $m+n—1$ együtthatóvektor lineárisan független rendszert alkot, azaz *a fenti módon meghatározott x_{ij} változók a szállítási feladat egy lehetséges bázismegoldását adják.*

Az $m \cdot n$-es szállítási feladatnak mindig van olyan lehetséges bázismegoldása, amelynek legfeljebb $m+n—1$ pozitív komponense van.

Az is nevezetes tény, hogy ha a szállítási feladatban az elszállítandó mennyiségek és a felvevőhelyek igényei egész számú értékek, akkor minden lehetséges bázismegoldás komponensei egész számok. A szállítási feladatnak ez a tulajdonsága a gazdasági alkalmazások szempontjából igen előnyös.

Mint láttuk, a szállítási feladatnak mindig van lehetséges megoldása. Ha az elszállítandó mennyiségek és igények, valamint a célfüggvény elemei véges értékek, akkor *a szállítási feladatnak mindig van optimális megoldása* is.

A szállítási feladatot a disztribúciós módszerrel megoldva először egy lehetséges bázismegoldást kell előállítani. (Pl. az ismertetett eljárással.) Ezután meg kell állapítani, hogy ez a megoldás optimális-e vagy sem. Nevezzük el a táblázat azon rekeszeit, amelyek x_{ij} szállításokat reprezentálnak, kötött helyeknek, a táblázat többi rekeszét pedig szabad helynek!

Rendeljünk a táblázat minden sorához és oszlopához változókat! Legyenek ezek a sorok szerint $u_1, u_2, \ldots, u_m$, az oszlopok szerint $v_1, v_2, \ldots, v_n$! Határozzuk meg ezeknek a változóknak az értékét úgy, hogy a kötött helyekre fennálljanak a

$$c_{ij} = u_i + v_j$$

egyenletek! (Azaz összesen $m+n—1$ db egyenletünk van.)

Megmutatjuk, hogy ha egy adott lehetséges programnál minden szabad helyre teljesül a

$$c_{ij} \geqq u_i + v_j,$$

átrendezve

$$c_{ij} — (u_i + v_j) \geqq 0$$

egyenlőtlenség, akkor ez a lehetséges program egyúttal optimális is.

Ehhez szükségünk van még a *hurok* fogalmára. A hurok a disztribúciós táblában *egy olyan zárt poligon, amelyik egy szabad helyről indul ki, és úgy jut oda vissza, hogy közben a poligon sarkain csak kötött helyek találhatók.*

Bebizonyítható, hogy egy lehetséges bázismegoldásban *minden szabad helyhez egy és csakis egy hurok tartozik.*

Induljunk ki a következő táblázatban található legegyszerűbb hurokból! (A táblázat szélein az u_i és v_j változókat tüntettük fel.)

	v_j	v_k
u_i	c_{ij}	x_{ik} c_{ik}
u_s	x_{sj} c_{sj}	x_{sk} c_{sk}

Ha a szállításokban eddig nem szereplő i és j viszonylatot szeretnénk a megoldásba bekapcsolni, akkor ezt csak úgy tehetjük, hogy a kapacitások és igények egyensúlya ne boruljon fel. Szállítson az i-edik raktár a j-edik megrendelőnek 1 egységnyi árut! Ekkor a k-adik szállítást egy egységgel csökkenteni kell, amit viszont az s-edik szállító fog kompenzálni a j-edik megrendelő rovására, s így az egyensúly helyreáll.

Az új szállítások:

$$1;\ x_{ik}-1;\ x_{sk}+1;\ x_{sj}-1.$$

A módosítás költségváltozása:

$$d = c_{ij}-c_{ik}+c_{sk}-c_{sj}.$$

Az új szállítási terv jobb a réginél, ha $d < 0$, ugyanolyan, ha $d = 0$ és költségesebb, ha $d > 0$.

Végezzük el a következő helyettesítéseket:

$$u_i+v_k = c_{ik},$$
$$u_s+v_j = c_{sj},$$
$$u_s+v_k = c_{sk}\ .$$

(Látható, hogy éppen a kötött helyekre vonatkozó feltevést alkalmaztuk.) A rendezések után

$$d = c_{ij}-u_i-v_j,$$

s innen már látható, hogy új megoldás keresése csak akkor indokolt, ha a $d > 0$ feltétel valamelyik szabad helyre nem teljesült.

A számításoknál arra is tekintettel kell lennünk, hogy a bázisváltozók száma ne változzon, azaz *nem egységnyi terméket áramoltatunk végig a hurkon, hanem az x_{ik} és x_{sj} közül a minimálisat,* az ehhez tartozó hely a transzformáció után szabad hellyé válik, míg az x_{ij} vektora bekerül a bázisba, kötött hellyé válik.

Az ábra és a hozzá tartozó magyarázat hasonló akkor is, ha a hurok nem egyszerű négyszög, hanem egy bonyolultabban végighaladó sokszög a táblázatban.

Bebizonyítható, hogy a disztribúciós táblázatban a fenti módon végrehajtott ún. *huroktranszformáció a bázistranszformáció megfelelője.*

Az u_i és v_j változók lényegében a tárolóhelyek, illetve a felvevőhelyek egyenleteihez tartozó duál változók. A szállítási feladat speciális szerkezete miatt a duál feltételek

$$u_i + v_j \leqq c_{ij}$$

alakúak. A bázisba bevont változókhoz tartozó duál feltételek egyenlet formájában teljesülnek, azaz egy lehetséges bázismegoldásnál legalább $m+n-1$ duál feltétel teljesül egyenletként. Mivel egy lineáris programozási feladatnak akkor van optimális megoldása, ha a primál és duál feladatnak egyaránt elértük egy lehetséges megoldását, az optimalitási kritérium a fenti feltételekből egyszerűen következik.

Mintapéldánkban az u_i és v_j változókra a következő egyenletek írhatók fel:

$$\begin{aligned} u_1 + v_2 &= 2, \\ u_1 + v_3 &= 4, \\ u_2 + v_4 &= 2, \\ u_3 + v_1 &= 2, \\ u_3 + v_3 &= 5, \\ u_3 + v_4 &= 9. \end{aligned}$$

Hat egyenlet van és 7 változó, azaz egy változót szabadon választhatunk meg.

Általában is ez a helyzet: $m+n-1$ kötött változóhoz $m+n-1$ egyenlet tartozik, a változók száma pedig megegyezik a szállítók és megrendelők összes számával: $m+n$. Megegyezés szerint ilyenkor $u_1 = 0$ értékkel indítjuk a számolást.

Példánkban tehát $u_1 = 0$, $u_2 = -6$, $u_3 = 1$, $v_1 = 2$, $v_2 = 2$, $v_3 = 4$ és $v_4 = 8$ értékek adódnak. Szokás szerint ezt a disztribúciós tábla bal szélén és felső részén tüntetjük fel:

	2	2	4	8
0	+ $\boxed{8}$	16 $\boxed{2}$	14 $\boxed{4}$	—1 $\boxed{7}$
—6	+ $\boxed{7}$	+ $\boxed{4}$	+ $\boxed{3}$	40 $\boxed{2}$
1	20 $\boxed{2}$	+ $\boxed{5}$	28 $\boxed{5}$	2 $\boxed{9}$

Kiszámítva a szabad helyekhez tartozó c_{ij}—(u_i+v_j) különbségeket, egyedül a jobb felső rekesznél találunk negatív értéket: 7—(0+8) = —1, azaz a megoldás nem optimális. (A táblázatban a pozitív d értékeket csak előjelükkel jelezzük, a negatív értékeket beírjuk a rekeszekbe, hiszen a legnagyobb abszolútértékű negatív rekeszből fogjuk az áttervezést indítani. Az előjelet és a negatív számokat a rekeszek jobb felső sarkába írjuk be.) Erről a szabad helyről kiinduló hurok a táblázatban grafikusan is feltüntetett négyszög, s a hurkon végigszállítható mennyiség $Q = 2$ egység. Ezt úgy kaphatjuk meg, hogy a hurok sarkait a szabad helyről kiindulva felváltva + és — jelekkel látjuk el (annak megfelelően, hogy oda vagy onnan szállítunk), s a negatív jelű sarkok minimumát tudjuk az előjeleknek megfelelően elszállítani. Az új táblázat:

	1	2	4	7
0	+ $\boxed{8}$	16 $\boxed{2}$	12 $\boxed{4}$	2 $\boxed{7}$
—5	+ $\boxed{7}$	+ $\boxed{4}$	+ $\boxed{3}$	40 $\boxed{2}$
1	20 $\boxed{2}$	+ $\boxed{5}$	30 $\boxed{5}$	+ $\boxed{9}$

A szabad helyeket megvizsgálva látjuk, hogy az optimalitáskritérium mindegyikre teljesül, azaz a táblázat a feladat optimális megoldását mutatja:

$$x_{12} = 16,\ x_{13} = 12,\ x_{14} = 2,\ x_{24} = 40,\ x_{31} = 20,\ x_{33} = 30,$$

a többi változó értéke zérus. A célfüggvény értéke, azaz a minimális összköltség a táblázat alapján $16 \cdot 2+12 \cdot 4+2 \cdot 7+40 \cdot 2+20 \cdot 2+30 \cdot 5 = 364$.

Egyetlen huroktranszformációval eljutottunk az optimális megoldáshoz. Ha azonban ez a táblázat nem adna optimális megoldást, akkor a huroktranszformációt — a megfelelő szabad hely bázisba vonásával — tovább kellene folytatni mindaddig, míg optimális táblázathoz nem jutunk. Az optimális megoldáshoz mindig eljuthatunk véges számú huroktranszformációval.

Megjegyezzük, hogy a gyakorlatban célszerű az optimumhoz elég „közeli" bázismegoldásból kiindulni, hogy minél kevesebb transzformációra legyen szükség. Az ismertetett módszerrel „szerencsénk" volt. Vannak azonban bizonyítottan jó induló megoldást szolgáltató módszerek, pl. Vogel és Korda módszere vagy a Habr-módszer, ezek ismertetésétől azonban itt eltekintünk, részletes leírásuk lineáris programozással foglalkozó tankönyvekben, illetve kézikönyvekben megtalálható, pl. Varga József: Gyakorlati programozás c. könyvében, l. Irodalomjegyzék.

Tudjuk azt, hogy egy lineáris programozási feladat akkor *degenerált,* ha bázisváltozói közül legalább egy nulla értéket vesz fel.

Ez a szállítási feladatnál kétféleképpen jelentkezhet:

— az első lehetséges bázismegoldás kijelölésekor legalább kétszer alakul ki olyan eset, amikor egyetlen bázisvektor meghatározása során két vonalat törölhetünk egyszerre,

— a huroktranszformációk valamelyikénél a negatív rekeszek alapján kijelölt minimális szállítási mennyiség a hurok legalább két csúcspontján egyenlő.

Az első esetben egy olyan szabad helyhez tartozó változót vonunk be a bázisba 0 szállítási értékkel, amelyikhez a táblázatban nem található hurok. (Természetesen nem feltétlenül egyetlen zérus értékű változóról van szó: a bázisváltozók számát $m+n-1$-re kell növelnünk.) A második esetben az egyforma értékű sarkok közül egyet — és csakis egyet — törlünk a táblázatban a kötött helyek közül, a másik (többi) szállítás értéke 0 lesz, miközben változója bekerül a bázisba.

A degeneráció kezelésére tekintsük a következő feladatot:

	F_1	F_2	F_3	F_4	
R_1	6 $\boxed{3}$	$\boxed{2}$	24 $\boxed{1}$	$\boxed{2}$	30
R_2	$\boxed{9}$	$\boxed{6}$	$\boxed{2}$	22 $\boxed{4}$	22
R_3	12 $\boxed{4}$	6 $\boxed{5}$	$\boxed{7}$	$\boxed{8}$	18
	18	6	24	22	

Ha a táblázatban látható induló megoldást jelöltük ki, ebben csak 5 kötött hely található 6 helyett. Szállítsunk 0 egységet a második raktárból a harmadik felvevőhelyre, majd nézzük meg, hogy a megoldás optimális-e?

	3	4	1	3
0	6 $\boxed{3}$	—2 $\boxed{2}$	24 $\boxed{1}$	—1 $\boxed{2}$
1	+ $\boxed{9}$	+ $\boxed{6}$	0 $\boxed{2}$	22 $\boxed{4}$
1	12 $\boxed{4}$	6 $\boxed{5}$	+ $\boxed{7}$	+ $\boxed{8}$

A $d = -2$ értékű rekeszből indított hurkon 6 egységet szállíthatunk, ez azonban két sarkon is megtalálható. Hagyjuk benn a bázisban a kisebb költségelemhez tartozó vektort!

	3	2	1	3
0	0 $\boxed{3}$	6 $\boxed{2}$	24 $\boxed{1}$	—1 $\boxed{2}$
1	+ $\boxed{9}$	+ $\boxed{6}$	0 $\boxed{2}$	22 $\boxed{4}$
1	18 $\boxed{4}$	+ $\boxed{5}$	+ $\boxed{7}$	+ $\boxed{8}$

Ez a táblázat nem ad optimális megoldást. A huroktranszformáció utáni új táblázat:

	3	2	1	2
0	0 $\boxed{3}$	6 $\boxed{2}$	2 $\boxed{1}$	22 $\boxed{2}$
1	+ $\boxed{9}$	+ $\boxed{6}$	22 $\boxed{2}$	+ $\boxed{4}$
1	18 $\boxed{4}$	+ $\boxed{5}$	+ $\boxed{7}$	+ $\boxed{8}$

Ez az optimális bázismegoldás degenerált: $x_{11} = 0$, $x_{12} = 6$, $x_{13} = 2$, $x_{14} = 22$, $x_{23} = 22$, $x_{31} = 18$ a bázisváltozók (szállítások) értékei.

Amennyiben az optimális táblázatban van olyan szabad hely, amelyhez tartozó $c_{ij} - (u_i + v_j) = 0$, akkor ezen szabad helynek a programba vonásával a szállítási összköltség változatlan marad, de új szállítási terv adódhat. Ilyenkor *a szállítási feladatnak alternatív optimuma van,* amelyet huroktranszformációval határozunk meg. Az alternatív optimumok bármely konvex lineáris kombinációi is optimális megoldást adnak, de itt már nincs biztosítva az x_{ij} változók egészértékűsége.

Ha a feladatban nincs biztosítva a kapacitások és igények egyensúlya, akkor két eset lehetséges: *a raktárak fölös kapacitásokkal rendelkeznek, vagy az igénylők túlkeresletet teremtettek.* Mindkét esetet könnyen vissza tudjuk vezetni az egyensúlyi feladatra. Ha túlkínálat van, akkor fiktív igénylőt iktatunk be, akik „felszívják" a felesleget, túlkereslet esetén pedig egy fiktív raktár „biztosítja" a hiányzó mennyiséget. A fiktív tárolóhelyről vagy a fiktív igénylőhöz értelemszerűen „ingyen", $c_{ij} = 0$ értékkel történnek a szállítások. Az optimális táblázat értelmezésekor természetesen figyelembe kell vennünk azt, hogy a fiktív soron vagy oszlopon szállítandó mennyiségek csak a fölösleg vagy hiány szétosztását végezték el.

Megeshet az is, hogy *bizonyos viszonylatokban nem lehetséges a szállítás* (kapcsolat hiánya, útviszonyok stb.). Ezt táblázatunkban úgy jelezzük, hogy ún. *tiltótarifákat* iktatunk be: az adott viszonylatban egy „végtelen nagy" költséggel tesszük lehetetlenné, hogy a minimumra törő célfüggvény ezt a szállítási útvonalat aktivizálja. A tiltótarifás feladat azonban már nem feltétlenül rendelkezik mindazokkal az előnyös tulajdonságokkal, amelyek a véges problémáknál bizonyítottak, például már az sem biztos, hogy lehetséges bázismegoldást elő tudunk állítani.

Feladatok

321. Határozzon meg egy lehetséges bázismegoldást az alábbi táblázatokkal adott szállítási feladatoknál! Azt is mondja meg, hogy mennyi a szállítási összköltség!

a)

	F_1	F_2	F_3	F_4	
R_1	7	8	5	6	45
R_2	3	2	1	9	50
R_3	5	9	4	3	65
	40	40	40	40	160

b)

	F_1	F_2	F_3	F_4	
R_1	1	3	2	1	11
R_2	4	6	0	2	62
R_3	1	8	7	9	37
	11	30	32	37	110

c)

	F_1	F_2	F_3	F_4	
R_1	5	2	5	2	18
R_2	0	4	1	4	26
R_3	3	7	6	7	31
R_4	4	9	4	5	23
	22	22	27	27	98

d)

	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	
R_1	4	4	5	7	8	24
R_2	9	3	4	5	7	25
R_3	7	8	6	7	3	17
R_4	9	7	8	9	2	17
	15	16	17	18	17	83

322. Valamelyik közelítő módszer segítségével határozza meg az alábbi szállítási feladatok egy-egy lehetséges bázismegoldását! Majd mondja meg, hogy mely szabad helyeknek megfelelő vektorok bázisba vonásával javítható a program!

a)

	F_1	F_2	F_3	F_4	
R_1	11 / 4	6	10 / 3	7	21 ~~10~~
R_2	9	13 / 5	7	4 / 9	17 ~~4~~
R_3	9	8	5 / 6	17 / 11	22 ~~17~~
	11	13	~~15~~ 5	21 ~~17~~	60

1 3

2 2 2 2

2 2 2.5

5 1 3 2

1 3 2

3 1 2

1 2

b)

	F_1	F_2	F_3	F_4	
R_1	9	6	4	7	12
R_2	6	1	4	9	9
R_3	5	5	3	8	23
	11	11	11	11	44

c)

	F_1	F_2	F_3	F_4	
R_1	0	0	7	2	61
R_2	4	0	2	7	62
R_3	3	1	0	4	81
R_4	5	5	0	0	84
	50	73	90	75	288

d)

	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	
R_1	9	6	4	9	3	14
R_2	8	7	1	6	5	16
R_3	2	3	2	9	7	18
R_4	2	4	5	8	6	22
	23	7	11	12	17	70

323. Oldja meg a következő szállítási feladatokat! Írja fel az optimális megoldást mutató disztribúciós táblázatot és határozza meg a szállítási összköltséget!

a)

	F_1	F_2	F_3	F_4	
R_1	1	0	2	6	60
R_2	3	5	1	9	30
R_3	2	7	6	0	90
	50	40	50	40	180

354. Határozza meg, hogy az alábbi állítások közül melyik igaz és melyik hamis! (Válaszát indokolja meg!)

i *a)* Az $m \cdot n$-es szállítási feladatnak mindig létezik olyan lehetséges megoldása, mely $(m+n-1)$-nél több pozitív elemet tartalmaz. kivéve ha $n=1$ vagy $m=1$ vagy $n=m=1$

i *b)* Egy szállítási feladat optimális megoldása nem változik, ha a fajlagos szállítási költségeket kétszeresére növeljük.

i *c)* Minden $5 \cdot 10$-es szállítási feladatnak van olyan lehetséges megoldása, amely 50 pozitív elemet tartalmaz.

h *d)* Egy $7 \cdot 9$ -es szállítási feladatnak mindig van olyan optimális megoldása, amely 15 pozitív elemet tartalmaz. 7+9-1 = 15 de lehet degenerált

h *e)* Ha egy szállítási feladatnak van olyan optimális megoldása, amely degenerált, akkor a feladatnak van alternatív optimuma is.

i *f)* Egy $10 \cdot 15$-ös szállítási feladatnak mindig létezik olyan optimális megoldása, amely legfeljebb 24 pozitív elemet tartalmaz. legfeljebb!! lehet kevesebb, ha degenerált

h *g)* Ha egy $8 \cdot 13$-as szállítási feladatnak van olyan optimális megoldása, mely 20-nál kevesebb pozitív elemet tartalmaz, akkor a feladatnak alternatív optimuma van. f. e

h *h)* Ha egy klasszikus szállítási feladat optimális megoldása degenerált, akkor lehet olyan igénylő, amelyhez a program szerint nem történik szállítás. az igénylőket ki kell elégíteni!

h *i)* Létezik olyan $8 \cdot 12$-es szállítási feladat, melynek optimális megoldása pontosan 9 pozitív elemet tartalmaz. legalább 12 helyre kell szállítani!

i *j)* Létezik olyan $7 \cdot 11$-es szállítási feladat, amelynek optimális megoldása pontosan 12 pozitív elemet tartalmaz.

h *k)* A szállítási feladat együtthatómátrixa nemszinguláris.

i *l)* Az $m+n$ egyenlettel jellemezhető klasszikus szállítási feladatban a kötött helyekhez tartozó $u_i+v_j = c_{ij}$ feltételekből álló egyenletrendszer szabadságfoka egy.

i *m)* Minden hurok páros számú elemet tartalmaz.

i *n)* Ha egy szállítási feladatnak több optimális megoldása van, akkor van olyan optimális megoldása is, amelynek nem minden eleme egész szám. konvex lin. komb.

h *o)* Ha egy $m \cdot n$-es szállítási feladatnak több optimális megoldása létezik, akkor van olyan optimális megoldása is, amelynek legalább $(m+n-1)$ pozitív eleme van. lehet, hogy degenerált

353)

	B	K	L	Br	T	
I.	-8	-20	-10	-25	-9	12
II.	-9	-18	-15	-10	-9	10
III.	-12	-18	-16	-18	-6	25
IV.	-8	-14	-15	-19	-8	22
	20	23	10	10	6	69

minden adathoz +25 az első sorban, a másodikhoz +20 stb.

M 50 ha-ként egységek

17	5	15	0	16
11	2	5	0	11
6	0	2	0	12
11	5	4	0	11

↑ 50 holdon egy egység!

1000 ha = 20×50 ha

↓ oszlopminimumot kivonjuk utána

600 = 12×50 ha

11	5	13	0	5
5	2	3	0	0
0	0	0	0	1
5	5	2	0	0