Pázmány Péter Katolikus Egyetem
Bölcsészettudományi Kar
Szociológia Intézet

Gazdaságmatematika

Füstös László

Gáspár László
Temesi József

Lineáris programozási gyakorlatok

Tankönyvkiadó, Budapest, 1987

EGYETEMI SEGÉDKÖNYV

Kiadását a művelődési miniszter rendelte el

Bírálták:

BIKICS ISTVÁNNÉ DR.
egyetemi docens

DR. SZIDAROVSZKY FERENC
egyetemi docens, a matematikai tudományok kandidátusa

ISBN 963 17 8748 6

Tartalomjegyzék

8. Lineáris programozási feladatok megoldása szimplex módszerrel

Az előző fejezet 3. tétele azt mondja ki, hogy egy feladatpárnak a szimplex táblázat akkor adja az optimális megoldását, ha annak utolsó oszlopában nincs negatív, utolsó sorában pedig nincs pozitív elem. Kérdés azonban az, hogy hogyan jutunk ilyen táblázathoz, vagyis hogyan kell az elemi bázistranszformációknál a bázisba bekerülő vektorokat (esetleg a generáló elemeket) kiválasztani. Tetszőlegesen választott generáló elemek esetén ugyanis esetleg soha nem jutunk az optimális megoldást jelentő táblához. Az előző pont első és második tételének figyelembevételével azonban megkönnyíthetjük a bázisba viendő vektorok megkeresését. E két tétel alapján célszerű egy olyan táblázatból kiindulni, melynek vagy utolsó oszlopában nincs negatív elem, ekkor a primál feladat egy megvalósítható megoldását; vagy utolsó sorában nincs pozitív elem, ekkor pedig a duál feladat egy megvalósítható megoldását kapjuk.

Az első esetben úgy kell kiválasztani a bázisba kerülő vektorokat, hogy minden egyes elemi bázistranszformáció végrehajtása után a szimplex táblázat a primál feladat egy megvalósítható megoldását adja. A transzformációkat addig kell folytatnunk, amíg az optimális megoldáshoz el nem jutunk, vagyis a táblázat utolsó sorában már nem lesz pozitív szám. Mivel ennél a módszernél a primál feladat megvalósítható megoldásainak egy sorozatán keresztül jutunk az optimális megoldáshoz, azért ezt a módszert *primál szimplex módszernek* nevezzük.

Eljuthatnánk az optimális megoldáshoz úgy is, hogy kiindulunk egy olyan táblázatból, melynek utolsó sorában nincs pozitív elem. Ez a táblázat — mint tudjuk — a duál feladat egy lehetséges megoldását adja. Utána az elemi bázistranszformációkat pedig úgy kell elvégeznünk, hogy minden egyes lépésnél a kapott táblázat utolsó sorában ne legyen pozitív elem. Ezt az eljárást addig kell folytatni, amíg el nem jutunk az optimális táblázathoz. Mivel ebben az esetben az optimális megoldáshoz a duál feladat megvalósítható megoldásainak egy sorozatán keresztül jutunk, azért ezt a módszert *duál szimplex eljárásnak* nevezzük.

Az eddigi programozási tapasztalatok azt mutatják, hogy általában célszerű az ún. primál szimplex módszerrel dolgozni, bár vannak olyan feladatok, melyek megoldása egyszerűbb a duál szimplex eljárással. Mi is először a primál szimplex eljárást ismertetjük részletesen.

De vajon van-e olyan lineáris programozási feladat, melynek induló szimplex táblázata olyan, hogy az utolsó oszlopában nincs negatív elem? Ez csak úgy lehetséges, ha a kapacitásvektor nem tartalmaz negatív elemet. Bármilyen lineáris programozási feladat kanonikus alakja ilyenné átalakítható. A primál bázismegoldáshoz akkor juthatunk könnyen, ha a kanonikus alak együtthatómátrixában szerepel minden m-edrendű egységvektor. A tapasztalat azt mutatja, hogy a gyakorlatban nagyon sok olyan feladat van, amely ezeket a feltételeket kielégíti.

Tegyük fel, hogy egy üzem m erőforrás felhasználásával n féle terméket állít elő. Az egyes erőforrásokból a tervidőszakban rendelkezésre álló mennyiségeket jelöljék a $\mathbf{b}$ vektor komponensei. A j-edik termék egységének előállításához az i-edik erőforrásból a_{ij} mennyiségre van szükség. A termékek eladási árait jelöljék a $\mathbf{c}$ vektor komponensei. Kérdés: melyik termékből hány darabot készítsünk, hogy az összeladási ár a lehető legnagyobb legyen? Egy adott tervidőszakban egyetlen erőforrás sem lehet negatív. Mivel a $\mathbf{b}$ jelöli ezeket a mennyiségeket, azért a $\mathbf{b}$ vektornak nincs negatív komponense, azaz $\mathbf{b} \geqq \mathbf{0}$. A szokásos jelölésekkel írjuk fel feladatunk általános alakját:

$$\begin{aligned} \mathbf{Ax} &\leqq \mathbf{b}, \\ \mathbf{x} &\geqq \mathbf{0}, \\ \mathbf{b} &\geqq \mathbf{0}, \\ \mathbf{c^*x} &\rightarrow \max! \end{aligned}$$

Az olyan általános alakú feladatot, ahol ki van kötve a $\mathbf{b}$ (kapacitás-) vektor nemnegativitása, *normál feladatnak* nevezzük. Tehát az olyan feladatot, amelynél minden feltétel $\leqq$ formájában teljesül (vagy ilyenre hozható), és a kapacitások között nincs negatív elem, normál feladatnak mondjuk.

Hozzuk a normál feladatot kanonikus alakra oly módon, hogy minden kapacitáskorlátozó feltétel bal oldalához adjuk hozzá a megfelelő eltérésváltozót, így a kanonikus alak:

$$\begin{aligned} \mathbf{Ax}+\mathbf{Eu} &= \mathbf{b}, \\ \mathbf{x} \geqq \mathbf{0}, \mathbf{u} &\geqq \mathbf{0}, \\ \mathbf{b} &\geqq \mathbf{0}, \\ \mathbf{c^*x} &\rightarrow \max. \end{aligned}$$

Másképpen felírva:

$$\begin{aligned} [\mathbf{A}, \mathbf{E}] \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} &= \mathbf{b}, \\ \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} &\geqq \mathbf{0}, \\ \mathbf{b} &\geqq \mathbf{0}, \\ [\mathbf{c}^*, \mathbf{0}^*] \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} &\rightarrow \max. \end{aligned}$$

Látható, hogy a normál feladat kanonikus alakjának feltételrendszerében szereplő együtthatómátrix, $[\mathbf{A}, \mathbf{E}]$ mátrix, tartalmaz annyi egységvektort, amennyi a feltételek száma. Ezek az egységvektorok a feltételrendszer oszlopvektorterének egy triviális (egység-) bázisát adják. Írjuk most fel a normál feladat szimplex táblázatát!

	$\mathbf{x}^*$	
$\mathbf{u}$	$\mathbf{A}$	$\mathbf{b}$
	$\mathbf{c}^*$	0

Az előző tételek alapján belátható, hogy ez a táblázat *a primál feladat egy megvalósítható bázismegoldását adja,* mivel a $\mathbf{b} \geqq \mathbf{0}$ kikötés miatt a táblázat utolsó oszlopában nincs negatív elem. Ehhez a táblázathoz tartozó induló bázis tehát $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Az $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ megoldáshoz tartozó célfüggvényérték

$$\mathbf{c}^*\mathbf{x} = \mathbf{c}^*\mathbf{0} = 0.$$

Ez az érték a táblázat jobb alsó sarkában megtalálható.

Itt megjegyezzük, hogy az $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ vektort bázismegoldásnak nevezzük, annak ellenére, hogy az $\mathbf{x}$ vektornak nincs pozitív eleme. Ezt azért tehetjük, mert tételeinket mi az

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{x} &= \mathbf{b}, \\ \mathbf{x} &\geqq \mathbf{0}, \\ \mathbf{c}^*\mathbf{x} &\to \max \end{aligned}$$

kanonikus alakú feladatokra mondtuk ki. A szimplex táblázat oszlopvektorai között tulajdonképpen az egységvektorok is szerepelnek, de mivel az egységbázisban vannak adva az oszlopvektorok, azért az egyszerűség kedvéért az egységvektorokat nem írjuk be a táblázatba. A normál feladat kanonikus alakjának megoldását az

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \\ \mathbf{b} \end{bmatrix}$$

vektorkomponensekből álló vektor adja. Ez a vektor — tételeink értelmében is — bázismegoldás, mert az $[\mathbf{A}, \mathbf{E}] \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} = \mathbf{b}$ egyenletben az $[\mathbf{A}, \mathbf{E}]$ mátrixnak a $\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix}$ vektor pozitív elemeihez tartozó oszlopvektorai valóban független rendszert alkotnak, és számuk legfeljebb annyi, mint a feltételek száma. Nekünk csak a primál feladat megoldására, tehát az $\mathbf{x}$ vektor komponenseire van szükségünk. A továbbiakban is csak a primál feladat megoldását, vagy ami ezzel ekvivalens, a megfelelő kanonikus alakú feladat bázismegoldásából az $\mathbf{x}$ vektorkomponensnek megfelelő vektort nevezzük a primál feladat bázismegoldásának. Ezt megtehetjük, mivel az $\mathbf{x}$ és $\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix}$ vektorhalmaz között kölcsönös és egyértelmű megfeleltetés létesíthető, azaz

$$\mathbf{x} \leftrightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix}.$$

Egyszerűen bizonyítható, hogy csúcspontnak csúcspont felel meg. (Ha az $\mathbf{A}$ mátrix $(m \times n)$ típusú, akkor a feladatban összesen $n+m$ primál és duál változó szerepel.)

Most már gazdaságilag is értelmezhetjük az induló táblázat bázismegoldását: $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ azt jelenti, hogy az n féle termék egyikéből sem termelünk. A primál feladat minden feltétele teljesül, hiszen a kapacitásokat nem léptük túl, mivel egyetlen erőforrásból sem használtunk fel semmit. Az egyes duális változók értéke megegyezik a megfelelő sorban levő kapacitás értékével.

Az így nyert megvalósítható programhoz tartozó árbevétel (a célfüggvény értéke) nyilván zérus, mivel egyetlen termék sem kerül legyártásra és így eladásra sem.

Mindezek után világos, hogy a normál feladat induló szimplex táblázata közvetlenül megfelel a primál szimplex eljárás céljainak, mivel tartalmazza a primál feladat egy megvalósítható bázismegoldását. Ha a táblázat utolsó sorában nincs pozitív elem, akkor ez a táblázat már az optimális megoldást mutatja. Ez a gyakorlatban szinte sohasem fordul elő, mert ez azt jelentené, hogy — mivel az utolsó sornak nincs pozitív eleme — minden termék ára negatív vagy zérus lenne. Gazdaságilag ez nem lehetséges. Ha pedig az utolsó sor elemei az egyes termékekben rejlő tiszta hasznot jelentenék, akkor az utolsó sor nempozitivitása miatt az üzem nem termelne haszonnal egyetlen terméket sem. Ezek után teljes joggal feltehetjük, hogy az utolsó sorban van pozitív elem, és mondjuk legyen ez a pozitív elem a $\mathbf{c}^*$ vektor j-edik eleme, azaz

$$c_j > 0.$$

A továbbiakban tegyük fel azt is, hogy

$$\mathbf{b} > \mathbf{0}.$$

Ezen feltevések után két esetet különböztetünk meg:

1. az együtthatómátrix j-edik oszlopában nincs pozitív elem,
2. az együtthatómátrix j-edik oszlopában van legalább egy pozitív elem.

Ezekkel az esetekkel kapcsolatos a következő tétel: *Az 1. esetben a célfüggvénynek az L halmazon nincs felső korlátja. A 2. esetben pedig át tudunk térni egy olyan bázismegoldásra, amelyhez nagyobb célfüggvényérték tartozik, mint a kiinduló bázismegoldáshoz.*

Generáló elem — mint ezt a lineáris algebrában láttuk — csak zérustól különböző lehet. Ha a j-edik oszlopban negatív számot választanánk generáló elemnek, akkor a bázistranszformáció elvégzése után az utolsó oszlopban lenne negatív elem (Pl. negatív lenne a δ érték) ami azt jelentené, hogy a táblázat nem ad megvalósítható megoldást a primál feladatra vonatkozóan. Ha pedig nem a legkisebb $\frac{b_i}{a_{ij}}$ hányadosnak megfelelően választjuk a generáló elemet, akkor a bázistranszformáció elvégzése után a „legkisebb keresztmetszetnek" megfelelő sorban az utolsó oszlop eleme negatív. Így ebben az esetben sem kapnánk megvalósítható megoldást. Ezekből következik, *hogy a normál feladatnál mindig a „legkisebb keresztmetszetnél" levő* $a_{ij} > 0$ *elemet kell generáló elemnek választani.*

Megjegyezzük, hogy a generáló elem megválasztása a fenti módon nem mindig egyértelmű. Előfordulhat ugyanis olyan eset, hogy a $\frac{b_i}{a_{ij}}$ hányadosok között több legkisebb van. Ebben az esetben *degenerációról* beszélünk. A *degenerációnál bármelyik legkisebb keresztmetszetet adó* $a_{ij} > 0$ *elemet is választjuk generáló elemnek,* a transzformáció elvégzése után egy olyan megvalósítható bázismegoldást (degenerált bázismegoldást) kapunk, amelynél a célfüggvényérték nagyobb, mint a kiinduló táblázatban. A degeneráció esetére később még röviden visszatérünk.

Most az egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy a generáló elemet mindig meg tudjuk egyértelműen választani, vagyis nem lép fel degeneráció. Láttuk, hogy ha a generáló elemet a fent leírt módon választjuk meg, akkor a bázistranszformáció elvégzése után kapott táblázat a primál feladat egy megvalósítható bázismegoldását adja. (Belátható, hogy minden olyan táblázat tekinthető induló táblázatnak, amelyhez elemi bázistranszformációval a megadott módon jutunk.) Tehát ezt is tekinthetnénk induló táblázatnak, és így mindazok az elgondolások, melyek az első táblázatra vonatkoztak, érvényesek erre a táblázatra is. Ha a transzformáció elvégzése után kapott táblázat utolsó sorában nem találunk pozitív elemet, akkor az optimális megoldást adó táblázattal van dolgunk. Ha pedig az utolsó sorban van pozitív elem, akkor ismét két eset lehetséges attól függően, hogy a táblázat utolsó sorában levő pozitív elem felett található-e pozitív elem vagy nem:

1. Kiderül, hogy a célfüggvény nem korlátos,
2. Át tudunk térni elemi bázistranszformációval olyan harmadik táblázatra, amely jobb programot ad mint az előző.

Ha tudunk a meghatározott módon a második táblázatban generáló elemet választani, akkor a megfelelő bázistranszformációval áttérhetünk a harmadikra. A második táblázatról a harmadikra való áttérésnél a δc_j érték azt mutatja, hogy a harmadik táblázathoz tartozó megoldás mennyivel jobb programot ad, mint a másodikhoz tartozó. Ezt az eljárást aztán lépésről lépésre folytatva, az elemi bázistranszformációk segítségével kapott táblázatok a primál feladat megvalósítható bázismegoldásainak olyan sorozatát adják, melyekhez tartozó célfüggvényértékek sorozata szigorúan növekvő. Az eljárás akkor ér véget (a degeneráció fellépését továbbra is kizárjuk), ha

— vagy eljutunk olyan táblázathoz, melynek utolsó sorában nincs pozitív elem. Ekkor az optimális megoldást kapjuk. Ez a táblázat — mint tudjuk — egyúttal a duál feladat optimumát is tartalmazza;

— vagy eljutunk olyan táblázathoz, melynek az utolsó sorában levő pozitív elemek fölött nem találunk pozitív elemet. Ebben az esetben — mint az bizonyítható — a célfüggvényünk nem korlátos.

Belátható, hogy ha a megadott módon választjuk a generáló elemeket, akkor minden elemi bázistranszformációval új bázismegoldáshoz jutunk. Mivel az **[A, E]** mátrix oszlopvektorterének véges számú (az adott feltételek mellett legfeljebb $\binom{m+n}{m}$ bázisa lehet, azért csak véges számú bázistranszformációt végezhetünk, vagyis véges számú lépésben a fenti két eset valamelyikének be kell következni.

Ezzel degenerációmentes esetben megmutattuk, hogy a normál feladat megoldásához (megoldásnak értve annak kimutatását is, hogy a célfüggvény felülről nem korlátos) *mindig eljuthatunk véges számú bázistranszformáció útján, és egyúttal megadtuk az út megkonstruálásának módszerét is. Vagyis megadtuk a primál szimplex eljárást.*

Felvetődik azonban a kérdés: ha az utolsó sorban több pozitív elem is van, akkor melyik felett válasszuk a generáló elemet, vagyis melyik oszlopot vonjuk be a bázisba. Azt tudjuk, hogy a δc_j azt mutatja, mennyivel nő a célfüggvény értéke akkor, ha a j-edik oszlopvektort visszük be a bázisba. Mivel nekünk a célfüggvény maximalizálása a cél, azért legelfogadhatóbbnak az látszik, hogy azt az oszlopvektort vigyük be mindig a bázisba, amelynél a δc_j érték a lehető legnagyobb. Természetesen semmi sem biztosítja azt, hogy ebben az esetben jutunk el leghamarabb a feladat megoldásához. (Szokás még az utolsó sor legnagyobb eleme felett választani a generáló elemet.)

Kiegészítésképpen vizsgáljuk meg még azt az esetet, amikor optimális megoldást kaptunk ugyan, tehát a táblázat utolsó oszlopában nincs negatív elem, és az utolsó sorában nincs pozitív elem, de

a) az utolsó oszlopban van zérus értékű elem,

b) az utolsó sorban van zérus értékű elem.

Az *a)* esetben ún. *degenerált bázismegoldást* kaptunk. Ez azt jelenti, hogy olyan bázismegoldásunk van, mely a

$$[\mathbf{A}, \mathbf{E}] \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} = \mathbf{b}$$

egyenletrendszerben a $\mathbf{b}$ vektort m-nél kevesebb lineárisan független vektor pozitív lineáris kombinációjaként állítja elő. Vagyis az $\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix}$ bázisvektornak m-nél kevesebb pozitív komponense van [feltéve, hogy $\mathbf{A}$ $(m\times n)$ típusú mátrix].

A *b)* esetben, ha a zérus értékű elem felett van pozitív elem, akkor elemi bázistranszformációval át tudunk térni egy olyan új bázisra, melynél a célfüggvény értéke nem változik, mivel $c_j = 0$, és így $\delta c_j = 0$. Ebben az esetben is generáló elemnek azt az elemet kell választani a $c_j = 0$ elem felett, ahol legkisebb a keresztmetszet. Így a feladatnak nemcsak egy optimális bázismegoldása van. Ha az utolsó sorban több zérus értékű elem is található, akkor a feladatnak több optimális bázismegoldása lehet. Ezeket az optimális bázismegoldásokat *alternatív optimumoknak* nevezzük. Mivel minden bázismegoldásnak az L halmazon egy csúcspont felel meg, és alternatív optimum létezése esetén a célfüggvény az L halmaz több csúcspontjában is a maximális értékét veszi fel, azért ezek konvex lineáris kombinációjaként előállított pontokban is maximális értékű a célfüggvény. Vagyis alternatív optimum esetén a feladatnak végtelen sok optimális megoldása van. Megjegyezzük, *hogy ha a primál feladatnak alternatív optimuma van, akkor a duál feladat optimuma degenerált.*

Amennyiben az utolsó sor zérus értékű eleme felett nincs pozitív elem, akkor létezik olyan $m+1$ komponensből álló nem bázismegoldás, melynél legalább két komponens tetszőleges nagyra növelhető (tehát a megoldás koordinátái között van nem korlátos), de a célfüggvény értéke nem változik.

Nézzük meg, hogy az eddig elmondottakat hogyan alkalmazzuk és értelmezzük konkrét példákon.

Első példa. Tekintsük most a következő feladatot, és oldjuk meg az ismertetett szimplex módszerrel. Egy üzemben öt különböző terméket lehet három erőforrás segítségével előállítani. A tervidőszakban rendelkezésre álló erőforrások mennyiségét, a fajlagos ráfordításokat (a technológiai együtthatókat) és az egyes termékek tiszta hozamát az alábbi táblázat mutatja:

Erőforrások	Termékek					Erőforrások kapacitása
	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	
I.	1	2	1	0	1	100
II.	0	1	1	1	1	80
III.	1	0	1	1	0	50
Termékek hozama	2	1	3	1	2	

Határozzuk meg azt a termelési programot, amely a maximális tiszta hozamot eredményezi!

E célnak megfelelően jelöljék az x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 változók az egyes termékekből gyártandó mennyiségeket. A feladatból következik, hogy az x_i mennyiségek egyike sem lehet negatív, és csak annyit szabad termelni az egyes termékekből, hogy ne lépjük túl az erőforrások kapacitását. Ezek után programozási feladatunk matematikai formája:

$$\begin{aligned}
x_1+2x_2+x_3 \qquad +x_5 &\leqq 100,\\
x_2+x_3+x_4+x_5 &\leqq 80,\\
x_1 \qquad +x_3+x_4 \qquad &\leqq 50,\\
x_1,\, x_2,\, x_3,\, x_4,\, x_5 \qquad &\geqq 0,\\
z = (2x_1+x_2+3x_3+x_4+2x_5) &\to \max.
\end{aligned}$$

Mivel a kapacitásvektor pozitív, és minden feltételnek $\leqq$ irányú egyenlőtlenség felel meg, azért feladatunk normál feladat, melynek induló szimplex táblázatát a megadott módon írjuk fel:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
u_1	1	2	1	0	1	100
u_2	0	1	1	1	$\boxed{1}$	80
u_3	1	0	1	1	0	50
	2	1	3	1	2	0

Ez a táblázat már egy megvalósítható bázismegoldását adja a feladatnak, mert az utolsó oszlopban nincs negatív elem. Mivel a bázisban az u_1, u_2, u_3 eltérésváltozóknak megfelelő oszlopvektorok (egységvektorok) vannak, azért ehhez a táblázathoz tartozó bázismegoldásban minden $x_i = 0$. Ez azt jelenti, hogy egyetlen terméket sem gyártunk, így biztosan nem lépjük túl a kapacitásokat, és ebben az esetben nincs semmi hasznunk. Vagyis a célfüggvény értéke zérus, ami a táblázat jobb alsó sarkában megtalálható. Az u_1, u_2, u_3 eltérésváltozók értéke rendre megegyezik az erőforrások kapacitásával. Másképpen: az $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ lehetséges bázismegoldás esetén az első egyenlőtlenség bal oldalából $u_1 = 100$ egység hiányzik ahhoz, hogy megegyezzék az egyenlőtlenség jobb oldalán álló mennyiséggel, 100-zal. Hasonlóan értelmezhető az $u_2 = 80$ és $u_3 = 50$ eltérésváltozó is.

Mivel a táblázat utolsó sorában vannak pozitív elemek, azért ez nem optimális. Át tudunk térni olyan táblázatra, melyhez tartozó célfüggvényérték nagyobb lesz, mint zérus. Az is látható, hogy az utolsó sor minden eleme pozitív, tehát bármelyik felett (bármelyik oszlopban) választhatunk generáló elemet. De melyiket válasszuk? Célunk a maximális hozam elérése, azért azt választjuk generáló elemnek, amelynél a célfüggvény növekedése, δc_j a legnagyobb. Ez pedig akkor lesz a legnagyobb, ha az 5. oszlop második elemét választjuk generáló elemnek. Ez azt is jelenti, hogy a bázisba kerül az x_5 változóhoz tartozó vektor, és kikerül a bázisból a második egységvektor. A bázistranszformáció elvégzése után táblázatunk a következő lesz:

	x_1	x_2	x_3	x_4	u_2	
u_1	1	1	0	−1	−1	20
x_5	0	1	1	1	1	80
u_3	1	0	$\boxed{1}$	1	0	50
	2	−1	1	−1	−2	−160

Látható, hogy ez a táblázat is egy megvalósítható bázismegoldást ad. Mivel az x_5 primál változónak megfelelő oszlopvektor bekerült a bázisba (az x_5 a táblázat első oszlopában található), azért ennek a nagysága 80. Ez azt mutatja, hogy ha az A_5 termékből 80 darabot gyártunk és a többi termékből egyet sem, akkor egy megvalósítható programunk van, amelyhez 160 egységnyi haszon tartozik. Az u_2 eltérésváltozó kikerült a bázisból, és így a neki megfelelő feltétel, a második feltétel egyenlőség formájában teljesül. Ennél a programnál a II. erőforrás kapacitása teljesen kimerül. Az $u_1 = 20$ eltérésváltozó azt jelenti, hogy az I. erőforrásból még 20 egységnyi, az $u_3 = 50$ pedig azt jelenti, hogy a III. erőforrásból még 50 egységnyi szabad kapacitás van. Mivel az utolsó sorban van még két pozitív elem, és mindkettő fölött találhatók pozitív számok, azért ez a táblázat még nem optimális, elemi bázistranszformációval javítható. Akkor javul a táblázatunk legnagyobb mértékben, ha a harmadik oszlop harmadik elemét választjuk generáló elemnek. Ekkor $\delta c_j = 50$. Ezzel a generáló elemmel elvégezve az elemi bázistranszformációt a következő táblázathoz jutunk:

	x_1	x_2	u_3	x_4	u_2	
u_1	$\boxed{1}$	1	0	—1	—1	20
x_5	—1	1	—1	0	1	30
x_3	1	0	1	1	0	50
	1	—1	—1	—2	—2	—210

Ez azt mutatja, hogy ha az A_3 termékből 50 darabot, az A_5 termékből 30 darabot gyártunk, akkor a tiszta haszon 210 egység lesz. A bázisból kikerült az u_3 eltérésváltozó is, tehát a neki megfelelő harmadik feltétel is egyenlőség formájában teljesül. Az $u_1 = 20$ azt jelenti, hogy az első erőforrásnak még van 20 egység szabad kapacitása. A táblázat utolsó sorában még van pozitív elem, így a táblázat nem optimális, felette is van pozitív szám, tehát a táblázat még javítható. A generáló elem megválasztása egyértelmű. Az x_1 és u_1 helyet cserél, melyet az alábbiakban láthatunk:

	u_1	x_2	u_3	x_4	u_2	
x_1	1	1	0	—1	—1	20
x_5	1	2	—1	—1	0	50
x_3	—1	—1	1	2	1	30
	—1	—2	—1	—1	—1	—230

Ez a táblázat már az optimális megoldást adja, mert utolsó sorában nincs pozitív elem. Vagyis *akkor lesz az adott feltételek mellett a haszon maximális* (230 egység), ha az

A_1 termékből 20 darabot,
A_3 termékből 30 darabot,
A_5 termékből 50 darabot készítünk. Az A_2 és A_4 termékből pedig egy darabot sem kell gyártani. Ehhez a táblázathoz tartozó optimális megoldást vektoralgebrai formában is felírhatjuk:

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 20 \\ 0 \\ 30 \\ 0 \\ 50 \end{bmatrix}, \qquad z_0 = \mathbf{c}^*\mathbf{x}_0 = 230.$$

Látható, hogy ebben a feladatban az optimális megoldásnál minden feltétel egyenlőség formájában teljesül. Vagyis minden erőforrás kapacitásának teljes kihasználását írja elő a program. (A gyakorlatban ilyen eset ritkán fordul elő.)

Mivel az optimális táblázat utolsó sorában nincs zérus értékű elem, azért a feladatnak csak egyetlen optimuma van. Ez az egyetlen optimális megoldás nem degenerált, mert a táblázat utolsó oszlopában nincs zérus értékű elem. A báziselemek között duális változó nincs, tehát minden feltétel egyenlőség formájában teljesül.

Ez a táblázat — mint azt bizonyítottuk — a feladat duálisának is mutatja az optimumát. A fenti probléma duálisa:

$$\begin{aligned}
y_1 + \phantom{y_2+{}} y_3 &\geqq 2,\\
2y_1 + y_2 \phantom{{}+y_3} &\geqq 1,\\
y_1 + y_2 + y_3 &\geqq 3,\\
y_2 + y_3 &\geqq 1,\\
y_1 + y_2 \phantom{{}+y_3} &\geqq 2,\\
y_1, y_2, y_3 &\geqq 0,\\
w = (100y_1 + 80y_2 + 50y_3) &\to \min.
\end{aligned}$$

Az optimális táblázatból leolvasható, hogy ennek a duális feladatnak az optimális megoldását az

$$\mathbf{y}^* = \mathbf{u}_0^* = [1;\, 1;\, 1]$$

vektor adja, és $w_0 = 230$. Az $\mathbf{u}_0^*$ komponenseit a táblázat utolsó sorából olvastuk le a következőképpen: megnéztük, hogy a legfelső sorban az eltérésváltozók közül melyikek szerepelnek, aztán a nekik megfelelő oszlop utolsó elemeinek ellenkező előjellel vett értéke adta ezek nagyságát.

Második példa. Oldjuk most meg feladatunkat abban az esetben, ha az I. erőforrásból nem 100, hanem csak 80 egység áll rendelkezésünkre! Ebben az esetben induló táblázatunk a következő:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
u_1	1	2	1	0	1	80
u_2	0	1	1	1	$\boxed{1}$	80
u_3	1	0	1	1	0	50
	2	1	3	1	2	0

Célfüggvényünk értéke akkor javul legnagyobb mértékben, ha generáló elemet az utolsó oszlopban választunk. Itt azonban két helyen is adódik a legkisebb keresztmetszet. Tehát *a feladatban degeneráció lép fel.* Az ötödik oszlop két első elemének bármelyikét választhatjuk generáló elemként. Mi válasszuk ugyanúgy, mint az eredeti feladatban, a másodikat. Ekkor a következő táblázatot kapjuk:

	x_1	x_2	x_3	x_4	u_2	
u_1	1	1	0	—1	—1	0
x_5	0	1	1	1	1	80
u_3	1	0	$\boxed{1}$	1	0	50
	2′	—1	1	—1	—2	—160

Most a harmadik sor harmadik elemét választjuk generáló elemnek, mert ebben az esetben lesz δc_j a legnagyobb. A transzformáció elvégzése után táblázatunk az alábbi formában írható:

	x_1	x_2	u_3	x_4	u_2	
u_1	$\boxed{1}$	1	0	—1	—1	0
x_5	—1	1	—1	0	1	30
x_3	1	0	1	1	0	50
	1	—1	—1	—2	—2	—210

Az utolsó sorban még van pozitív elem, és mivel e felett is van pozitív szám, azért a táblázat még javítható (de ez csak látszólagos). Generáló elemként az első sor első elemét kell választanunk. Az elemi transzformáció elvégzése után már az optimális táblázatot kapjuk:

	u_1	x_2	u_3	x_4	u_2	
x_1	1	1	0	—1	—1	0
x_5	1	2	—1	—1	0	30
x_3	—1	—1	1	2	1	50
	—1	—2	—1	—1	—1	—210

Látható, hogy a degeneráció semmi problémát nem jelentett. Ha az induló táblázatnál generáló elemnek nem az ötödik oszlop második, hanem első elemét választanánk, akkor sem okozna problémát a feladat megoldása. Amint látható, a feladatnak csak egy optimális megoldása van, de mivel az utolsó oszlopban van zérus értékű elem is, azért ezt az optimális megoldást *degenerált bázismegoldásnak* mondjuk. *Ha egy feladat megoldása* *során degeneráció lép fel,* akkor *az optimális megoldásnak nem szükségképpen kell degenerálnak lennie.* (Itt a célfüggvény értéke 210 egység).

Az előzőekben beláttuk, hogy degenerációmentes esetben a normál feladat mindig megoldható véges számú elemi bázistranszformáció segítségével. Nézzük meg, hogy vajon ez-e a helyzet akkor is, ha a feladat megoldása során degeneráció lép fel! Degeneráció esetén is igaz, hogy az L halmaznak véges sok csúcsa van, tehát véges sok megvalósítható bázismegoldás létezik. Míg azonban degenerációmentes esetben minden elemi bázistranszformációval olyan új bázishoz jutunk, melyhez nagyobb célfüggvényérték tartozik, mint az előzőhöz, addig degeneráció esetén ez nem áll fenn.

Degeneráció esetén az elemi bázistranszformáció elvégzése után a kapott táblázat utolsó oszlopában lesz legalább egy zérus értékű elem. Előfordulhat, hogy a következő generáló elemet éppen az utolsó oszlop zérus értékű elemének megfelelő sorban kell választani, így egy olyan bázishoz jutunk, melynek célfüggvényértéke megegyezik az eredetivel. *Elképzelhető, hogy a generáló elemeket egymás után úgy választjuk meg* (de mindig abban a sorban, amelynél az utolsó oszlop megfelelő eleme zérus), *hogy visszajutunk egy olyan bázishoz, amellyel már találkoztunk,* azaz kialakulna egy ún. ciklus. Ha aztán ismét olyan sorrendben választjuk a generáló elemeket, mint az előző ciklus esetén, akkor az előbbi utat járjuk végig. Így elképzelhető, hogy végtelen sokszor bejárunk egy utat, mégsem jutunk közelebb a megoldáshoz. Felvetődik, hogy a degeneráció nem teszi-e megoldhatatlanná a feladatokat? Nem történhet-e meg, hogy degeneráció esetén bárhogyan is választjuk a generáló elemet, a szimplex algoritmus végtelenül ismétlődő transzformációkhoz vezet?

A gyakorlat ennek ellentmond. Ugyanis az utóbbi években nagyon sok lineáris programozási feladat került megoldásra. Ezek nagy része degenerációt tartalmazott, de egyetlenegy esetben sem sikerült olyan — nem mesterségesen konstruált — példát találni, ahol a végtelen ciklus a szokásos módon megválasztott generáló elemek esetén bekövetkezett volna. Ez a tapasztalat azt mutatja, hogy egyáltalán nem kell tartani a degenerációtól. A degenerációt tartalmazó feladatok megoldásával kapcsolatban is bizonyítható a következő tétel:

Egy normál alakú lineáris programozási feladathoz (akár tartalmaz degenerációt, akár nem) mindig megadható olyan egyértelmű generálóelem-választási szabály (algoritmus), mely véges lépésben vagy optimális bázismegoldáshoz vezet, vagy amely végén kiderül, hogy a feladat célfüggvénye nem korlátos az L halmazon.

Ebből a tételből következik, hogy *minden normál feladat véges számú elemi transzformációval megoldható.* Már csak az a kérdés, hogyan oldjuk meg az olyan feladatot, amelynél a megoldás során degeneráció lép fel. Degeneráció kétféleképpen állhat elő:

a) A feladat megoldása során legalább egyszer nem tudjuk a generáló elemet egyértelműen megválasztani, mivel több legkisebb keresztmetszet létezik.

b) Az induló táblázat utolsó oszlopában legalább egy zérus értékű elem van.

Az *a)* esetben a legkisebb keresztmetszetet adó elemek közül tetszőlegesen választjuk ki a generáló elemet. A transzformáció elvégzése után az utolsó oszlopban megjelenik a zérus értékű elem. Most már az *a)* és *b)* esetet együtt tárgyalhatjuk. Ha a következő generáló elem nem abban a sorban van, ahol az utolsó oszlop eleme zérus, akkor a ciklus létezését máris elkerültük. (Lehetőleg erre törekedjünk!) Ha a generáló elem olyan sorban van, amelynél az utolsó oszlop eleme zérus, akkor a transzformáció elvégzése után a célfüggvény értéke nem javul. Ezután 2 eset lehetséges, mégpedig:

1. vagy tudunk választani valamelyik lépésnél olyan generáló elemet, amelynél a célfüggvény már javul, és akkor elkerültük a ciklus létezését,
2. vagy visszajutunk ahhoz a bázishoz ahonnét kiindultunk. Ebben az esetben egy másik legkisebb keresztmetszetnél kell a generáló elemet választani.

Harmadik példa. Térjünk vissza ismét az eredeti példa adataihoz, de most változtassunk a tiszta hozam paraméterein. Tegyük fel, hogy az A_4 termék fajlagos tiszta hozamát sikerül önköltségcsökkentés révén 1-ről 2-re emelni. Ebben az esetben a programozást a módosított adatokkal az előbbiekhez hasonlóan elvégezve a következő optimális programot adó táblázathoz jutunk: 3

	u_1	x_2	u_3	x_4	u_2	
x_1	1	1	0	—1	—1	20
x_5	1	2	—1	—1	0	50
x_3	—1	—1	1	$\boxed{2}$	1	30
	—1	—2	—1	0	—1	—230

A táblázat utolsó sorában nincs pozitív elem, tehát a belőle kiolvasható program optimális. Azonban az utolsó sorban van zérus értékű elem, amely *alternatív optimum* lehetőségét jelenti. Válasszunk most generáló elemet a nulla feletti oszlopban. Mivel ebben az oszlopban csak egy pozitív elem van (a 2-es), azért ezt kell generáló elemnek választani. Vagyis az x_3 és x_4 változók helyet cserélnek.

Az elemi bázistranszformáció elvégzése után a következő táblázatot kapjuk:

	u_1	x_2	u_3	x_3	u_2	
x_1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	35
x_5	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	65
x_4	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	15
	—1	—2	—1	0	—1	—230

Látható, hogy ez a táblázat is optimumot ad. A célfüggvény értéke itt is 230. *Ennek a feladatnak két optimális bázismegoldása van,* melyek a következők

$$\mathbf{x}_0^{(1)} = \begin{bmatrix} 20 \\ 0 \\ 30 \\ 0 \\ 50 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{x}_0^{(2)} = \begin{bmatrix} 35 \\ 0 \\ 0 \\ 15 \\ 65 \end{bmatrix}.$$

Ezeket alternatív optimumoknak nevezzük. Mi a továbbiakban csak akkor beszélünk alternatív optimumokról, ha *több optimális bázismegoldás van*, és ezeket a bázismegoldásokat mondjuk alternatív optimumoknak. Szokás ettől eltérően is definiálni az alternatív optimumokat. De azt tudjuk, *hogy ha a lineáris programozási feladatnak több alternatív optimuma van, akkor végtelen sok optimális megoldás létezik*, és ezek az alternatív optimumok konvex lineáris kombinációjaként állíthatók elő. Így ebben az esetben a primál feladat összes optimális megoldását a következő kifejezés adja:

$$\mathbf{x}_0 = \lambda \mathbf{x}_0^{(1)} + (1-\lambda)\mathbf{x}_0^{(2)}, \qquad \text{ahol } 0 \leqq \lambda \leqq 1.$$

Ha az optimális megoldást adó táblázatot transzponálnánk, akkor az utolsó sor és utolsó oszlop helyet cserélne. Vagyis a transzponált táblázat utolsó oszlopában lenne zérus értékű elem, ami azt jelenti, hogy *a duális feladat optimumát adó bázis degenerált.*

Negyedik példa. Változtassuk meg ismét az eredeti feladat néhány paraméterét! Ezeknek az egyszerűség kedvéért most gazdasági jelentést nem adunk. Feladatunknak matematikai formája legyen a következő:

$$\begin{aligned} -x_1+2x_2+x_3 \qquad +x_5 &\leqq 100, \\ x_2+x_3+x_4-x_5 &\leqq 80, \\ x_1 \qquad +x_3-x_4 \qquad &\leqq 50, \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geqq 0, \\ z = (2x_1+x_2+3x_3+x_4+2x_5) &\to \max! \end{aligned}$$

Írjuk fel a feladat induló táblázatát!

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
u_1	−1	2	1	0	$\boxed{1}$	100
u_2	0	1	1	1	−1	80
u_3	1	0	1	−1	0	50
	2	1	3	1	2	0

Generáló elemnek válasszuk az első sor ötödik elemét! A bázistranszformáció elvégzése után a következő táblázathoz jutunk:

	x_1	x_2	x_3	x_4	u_1	
x_5	—1	2	1	0	1	100
u_2	—1	3	2	1	1	180
u_3	$\boxed{1}$	0	1	—1	0	50
	4	—3	1	1	—2	—200

A harmadik sor első elemét választva generáló elemnek a következő táblázatot kapjuk:

	u_3	x_2	x_3	x_4	u_1	
x_5	1	2	2	—1	1	150
u_2	1	3	3	0	1	230
x_1	1	0	1	—1	0	50
	—4	—3	—3	5	—2	—400

Most már csak egy pozitív elem van az utolsó sorban. A felette levő oszlopban viszont már nincs pozitív elem. Ez azt jelenti, hogy *a célfüggvény nem korlátos az L halmazon, vagyis a feladatnak nincs optimális megoldása.* Valóban az

$$\mathbf{x} = k \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k \\ 0 \\ 0 \\ k \\ k \end{bmatrix}$$

vektor minden $k \geqq 0$ értéknél egy megvalósítható megoldását adja a feladatnak. Ebben az esetben pedig a célfüggvény értéke:

$$z = \mathbf{c}^*\mathbf{x} = [2;\ 1;\ 3;\ 1;\ 2] \begin{bmatrix} k \\ 0 \\ 0 \\ k \\ k \end{bmatrix} = 2k+k+2k = 5k.$$

Ha $k \to \infty$, akkor $z \to \infty$. A feladatnak tehát valóban nincs optimális megoldása.

Ötödik példa. Előfordulhat, hogy a megoldás során olyan táblázathoz jutunk, amelynek utolsó oszlopában nincs negatív elem (tehát a táblázat a primál feladat egy lehetséges bázismegoldását adja), utolsó sorában pedig több pozitív elem is található. Ha *az utolsó sorban van legalább egy olyan pozitív elem, amely fölött levő oszlopban nincs pozitív elem, akkor a feladatnak szintén nincs optimális megoldása, a célfüggvény nem korlátos* *az L halmazon.* Ennek bemutatására tekintsük az alábbi normál feladatot, és oldjuk meg a szokásos módon!

$$\begin{aligned} x_1-2x_2 \qquad\quad -x_4-\ x_5 &\leqq 100,\\ 3x_1+\ x_2-5x_3-x_4+8x_5 &\leqq 80,\\ -3x_1 \qquad\ +\ x_3+x_4+2x_5 &\leqq 50,\\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5 &\geqq 0,\\ z=(2x_1+x_2+3x_3+x_4+2x_5) &\to \max. \end{aligned}$$

A feladat induló szimplex táblázata:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
u_1	1	—2	0	—1	—1	100
u_2	3	1	—5	—1	8	80
u_3	—3	0	1	1	2	50
	2	1	3	1	2	0

Ebből kiindulva — a szokásos módon — hajtsuk végre a következő elemi bázistranszformációkat:

az első lépésben cseréljen helyet az x_3 az u_3-mal,

a második lépésben cseréljen helyet az x_1 az u_1-gyel!

Ezek után a következő táblázatot kapjuk:

	u_1	x_2	u_3	x_4	x_5	
x_1	1	—2	0	—1	—1	100
u_2	12	—23	5	—8	6	1530
x_3	3	—6	1	—2	—1	350
	—11	23	—3	9	7	—1250

Ez a primál feladat egy lehetséges megoldását adja. Az utolsó sorban azonban még szerepelnek pozitív elemek. Így a lehetséges megoldás még nem optimális megoldás. Az utolsó sornak van olyan pozitív eleme (a második és a negyedik), amely felett nem tudunk generáló elemet választani. Így az adott normál feladatnak nincs optimális megoldása annak ellenére, hogy az utolsó sorban olyan pozitív elem is van (az ötödik), amely felett lehetne generáló elemet választani. Pl.: az $\mathbf{x} = k[1;\ 1;\ 1;\ 1;\ 0]^*$ vektor minden $k \geqq 0$ esetén lehetséges megoldása a primál feladatnak, amelynél a célfüggvény értéke $\mathbf{c}^*\mathbf{x} = 7k$. Ha a $k \to \infty$, akkor a $\mathbf{c}^*\mathbf{x} \to \infty$. Tehát a célfüggvény nem korlátos az L halmazon.

Hatodik példa. Végezetül tekintsük azt a normál feladatot, amelynek feltételrendszere megegyezik a negyedik példa feltételrendszerével, míg célfüggvénye: $\mathbf{c}^*\mathbf{x} = (3x_1+2x_2+4x_3-5x_4+2x_5) \to \max$! A feladat induló szimplex táblázata:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
u_1	—1	2	1	0	1	100
u_2	0	1	1	1	—1	80
u_3	1	0	1	—1	0	50
	3	2	4	—5	2	0

Az optimális megoldást adó táblázathoz két lépésben eljuthatunk, éspedig
az első lépésben helyet cserél az x_1 és az u_3,
a második lépésben helyet cserél az x_5 és az u_1.
Az optimális megoldást adó táblázat a következő:

	u_3	x_2	x_3	x_4	u_1	
x_5	1	2	2	—1	1	150
u_2	1	3	3	0	1	230
x_1	1	0	1	—1	0	50
	—5	—2	—3	0	—2	—450

Látható, hogy az optimális megoldást adó táblázat utolsó sorában van zérus értékű elem. E felett azonban nem tudunk generáló elemet választani, mivel a felette levő oszlopban nincs pozitív elem. Tehát a feladatnak csak egy optimális bázismegoldása van, mely a következő:

$$\mathbf{x}_0^* = [50;\ 0;\ 0;\ 0;\ 150].$$

Itt alternatív optimumról nem beszélhetünk (alternatív optimum csak bázismegoldás lehet). *Mivel az utolsó sorban van zérus értékű elem, azért a feladatnak végtelen sok optimális megoldása van.* Ilyen esetben — amint azt az előzőkben leírtuk — létezik olyan $m+1$ komponensből álló nem bázismegoldás, melynél legalább két komponens tetszőleges nagyra növelhető. Ennek a feladatnak optimális megoldását adja a következő vektor:

$$\mathbf{x}^* = [50+t;\ 0;\ 0;\ t;\ 150+t], \qquad \text{ahol } t \geqq 0.$$

Ez az $\mathbf{x}$ vektor nem bázismegoldás, és az első, negyedik és ötödik komponense (legalább két komponense) tetszőleges nagyra növelhető, mivel t bármilyen nagy pozitív szám lehet. Arról, hogy az

$$\mathbf{x}^* = [50+t;\ 0;\ 0;\ t;\ 150+t]$$

vektor bármilyen nem negatív t érték esetén optimális megoldás, egyszerűen meggyőződhetünk. Csupán azt kell belátni, hogy kielégíti a feltételrendszert, és $\mathbf{c}^*\mathbf{x} = 450$. Ezt pedig az $\mathbf{x}$ vektornak a hatodik példába történő behelyettesítésével igazolhatjuk.

Feladatok

T

71. Oldja meg az alábbi feladatokat!

a)
$$\begin{aligned} x_1+2x_2+3x_4 &\leqq 20,\\ x_1+4x_2+x_3-x_4 &\leqq 22,\\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geqq 0,\\ (4x_1+2x_2+x_3+5x_4) &\to \max; \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} x_1+x_2-x_3+2x_4 &\leqq 14,\\ 2x_1+x_2+5x_3-x_4 &\leqq 16,\\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geqq 0,\\ (4x_1+3x_2+2x_4) &\to \max; \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} 2x_1+x_2+x_4 &\leqq 8,\\ x_1-x_2+x_3+x_4 &\leqq 10,\\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geqq 0,\\ (4x_1+2x_2+3x_3+4x_4) &\to \max; \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} x_1+2x_2+3x_3-x_4 &\leqq 10,\\ 4x_1-x_2+2x_3+2x_4 &\leqq 10,\\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geqq 0,\\ (6x_1+7x_2+3x_3+10x_4) &\to \max. \end{aligned}$$

72. Határozza meg az alábbi feladatok optimális megoldásait és az optimális megoldásokhoz tartozó célfüggvényértéket!

a)
$$\begin{aligned} x_1-x_2+x_3+x_4 &\leqq 10,\\ -2x_1+3x_2+x_3-x_4 &\leqq 12,\\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geqq 0,\\ (3x_1+x_2+2x_3+7x_4) &\to \max; \end{aligned}$$

all. opt. 2 db.

b)
$$\begin{aligned} 2x_1-x_2+x_3+x_4 &\leqq 16,\\ x_1+x_2+x_3+2x_4 &\leqq 20,\\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geqq 0,\\ (4x_1+x_2+3x_3+2x_4) &\to \max; \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} x_1+x_2-x_3+2x_4 &\leqq 14,\\ -2x_1+x_2+2x_3+x_4 &\leqq 12,\\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geqq 0,\\ (-7x_1+8x_2+7x_3+11x_4) &\to \max; \end{aligned}$$

d)
$$
\begin{aligned}
x_1+x_2+x_3-x_4 &\leqq 10,\\
-2x_1+x_2+3x_3+x_4 &\leqq 2,\\
x_1, x_2, x_3, x_4 &\geqq 0,\\
(6x_1+4x_2+3x_3-6x_4) &\to \max.
\end{aligned}
$$

73. Határozza meg az alábbi normál feladatok optimális megoldását mutató szimplex táblázatokat, majd ezek alapján írja fel mind a primál, mind a duál feladatok optimális megoldását és az optimális megoldáshoz tartozó célfüggvényértéket!

a)
$$
\begin{aligned}
x_1+x_2-x_3 &\leqq 12,\\
x_1-x_3 &\leqq 8,\\
-x_1+2x_2+2x_3 &\leqq 6,\\
x_1, x_2, x_3 &\geqq 0,\\
(6x_1+7x_2+2x_3) &\to \max;
\end{aligned}
$$

b)
$$
\begin{aligned}
x_1+x_3 &\leqq 40,\\
-x_2+x_3 &\leqq 10,\\
x_1+x_2-x_3 &\leqq 18,\\
x_1, x_2, x_3 &\geqq 0,\\
(4x_1+3x_3) &\to \max;
\end{aligned}
$$

c)
$$
\begin{aligned}
x_1+x_2 &\leqq 10,\\
x_2+x_3 &\leqq 12,\\
x_1+x_3 &\leqq 14,\\
x_1, x_2, x_3 &\geqq 0,\\
(6x_1+6x_2+6x_3) &\to \max;
\end{aligned}
$$

d)
$$
\begin{aligned}
x_1+x_2 &\leqq 10,\\
x_1+x_3 &\leqq 10,\\
x_2+x_3 &\leqq 10,\\
x_1, x_2, x_3 &\geqq 0,\\
(5x_1+6x_2+7x_3) &\to \max.
\end{aligned}
$$

74. Oldja meg az alábbi

$$
\begin{aligned}
\mathbf{Ax} &\leqq \mathbf{b},\\
\mathbf{x} &\geqq \mathbf{0},\\
\mathbf{c^*x} &\to \max
\end{aligned}
$$

alakú feladatokat! Írja fel az optimális megoldást adó szimplex táblázatot és a duális feladat optimális megoldását is! A feladatoknak csak a paramétereit adjuk meg.

a)
$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 2 & 1\end{bmatrix},\qquad \mathbf{b}=\begin{bmatrix}10\\12\\24\end{bmatrix},\qquad \mathbf{c}=\begin{bmatrix}3\\4\\5\\3\end{bmatrix};$$

b)
$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 1 & 3\\ 1 & 1 & 0 & 1\end{bmatrix},\qquad \mathbf{b}=\begin{bmatrix}12\\12\\12\end{bmatrix},\qquad \mathbf{c}=\begin{bmatrix}6\\6\\6\\6\end{bmatrix};$$

c)
$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 2\\ 2 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 2\end{bmatrix},\qquad \mathbf{b}=\begin{bmatrix}11\\12\\14\end{bmatrix},\qquad \mathbf{c}=\begin{bmatrix}5\\6\\7\\3\end{bmatrix};$$

d)
$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}3 & 6 & 4 & 2\\ 2 & 4 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 3 & 2\end{bmatrix},\qquad \mathbf{b}=\begin{bmatrix}60\\40\\80\end{bmatrix},\qquad \mathbf{c}=\begin{bmatrix}2\\5\\4\\3\end{bmatrix}.$$

75. Határozza meg az alábbi programozási feladatok optimális megoldását mutató szimplex táblázatokat! Ezek alapján írja fel mind a primál, mind a duál feladatok optimális megoldásait! Mondja meg, hogy az optimális bázismegoldások közül melyik degenerált!

a)
$$\begin{aligned}
x_1+3x_2+x_4-x_5 &\leqq 12,\\
x_1-x_2+x_3-x_4+x_5 &\leqq 12,\\
x_2+2x_4 &\leqq 4,\\
3x_1+x_3+x_4+x_5 &\leqq 16,\\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geqq 0,\\
(7x_1+5x_2+4x_3+x_4+4x_5) &\to \max;
\end{aligned}$$

366. old.

b)
$$\begin{aligned}
x_1-x_2+x_3 &\leqq 8,\\
x_2+x_3-x_4 &\leqq 11,\\
x_1+2x_2-x_3+x_4 &\leqq 10,\\
x_1, x_2, x_3, x_4 &\geqq 0,\\
(6x_1+2x_2+5x_3+7x_4) &\to \max;
\end{aligned}$$

367 old.

c)
$$\begin{aligned}
x_1+2x_2-x_3+x_5 &\leqq 8,\\
2x_1+x_2+x_3+x_4+x_5 &\leqq 11,\\
x_2+x_3-x_4+x_5 &\leqq 5,\\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geqq 0,\\
(2x_1+3x_2+5x_3+3x_4+5x_5) &\to \max;
\end{aligned}$$

-/) -

d)
$$\begin{aligned}
x_1+2x_2+x_3 \qquad &\leqq 10,\\
x_1-x_2 \qquad +x_4 &\leqq 12,\\
x_1+x_2+x_3+2x_4 &\leqq 14,\\
x_1, x_2, x_3, x_4 \qquad &\geqq 0,\\
(7x_1+7x_2+4x_3+2x_4) &\to \max.
\end{aligned}$$

76. Oldja meg a következő normál feladatokat! Mindegyik feladatnál írja fel azt a (feladat megoldása során utolsónak elkészített) szimplex táblázatot, melynek alapján válaszolni tud az alábbi kérdésekre!

(1) Van-e a feladatnak optimális megoldása?

(2) Vannak-e a feladatnak alternatív optimumai?

(3) Hány optimális megoldása van a feladatnak?

(4) Van-e degenerált optimális bázismegoldása a feladatnak?

A (2), (3), (4) kérdésekre adott válaszában azt is határozza meg, hogy melyek ezek a megoldások!

a)
$$\begin{aligned}
2x_1 \qquad +x_3-x_4+x_5 &\leqq 10,\\
x_2 \qquad -2x_4+2x_5 &\leqq 14,\\
x_1-x_2-x_3+x_4+x_5 &\leqq 8,\\
x_2-x_3 \qquad +2x_5 &\leqq 16,\\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \qquad &\geqq 0,\\
(10x_1+20x_2+2x_3+4x_4+5x_5) &\to \max;
\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned}
x_1 \qquad + x_3 \qquad +x_5 &\leqq 8,\\
x_2 \qquad +x_4+x_5 &\leqq 10,\\
3x_1-x_2+x_3+x_4+x_5 &\leqq 2,\\
x_1 \qquad +2x_3-x_4+x_5 &\leqq 14,\\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \qquad &\geqq 0,\\
(4x_1+6x_2+7x_3+3x_4+10x_5) &\to \max;
\end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned}
x_1 \qquad +x_3+x_4 \qquad &\leqq 20,\\
-3x_1+x_2 \qquad +x_5 &\leqq 22,\\
x_2+x_3+x_4 \qquad &\leqq 30,\\
x_4+x_5 &\leqq 32,\\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \qquad &\geqq 0,\\
(3x_1+8x_2+10x_3+15x_4+4x_5) &\to \max;
\end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned}
2x_1-2x_2+x_3-x_4+x_5 &\leqq 10,\\
x_1-2x_2-x_3-x_4+x_5 &\leqq 6,\\
-x_1+x_2+2x_3+2x_4 \qquad &\leqq 20,\\
-x_2-x_3+x_4+x_5 &\leqq 8,\\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \qquad &\geqq 0,\\
(3x_1+4x_2+2x_3+3x_4+4x_5) &\to \max.
\end{aligned}$$

2

77. Oldja meg a következő általános alakú feladatokat szimplex módszerrel! Először írja fel a feladatok duálisát — ezek normál feladatok lesznek —, és aztán ezeket oldja meg az ismertetett módszerrel! A duál feladat optimális megoldását mutató táblázat egyúttal mutatja a primál feladat optimális megoldását is.

a)
$$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3 &\geqq 1,\\ x_1-x_2+3x_3 &\geqq 3,\\ -x_1+2x_2+x_3 &\geqq 0,\\ x_1-2x_2+x_3 &\geqq 1,\\ x_1-x_2+x_3 &\geqq 2,\\ x_1, x_2, x_3 &\geqq 0,\\ (5x_1+10x_2+15x_3) &\to \min; \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} x_1+x_2 &\geqq 8,\\ x_2+x_3 &\geqq 8,\\ x_3+x_4 &\geqq 6,\\ x_1+x_4 &\geqq 4,\\ x_2+x_3+x_4 &\geqq 10,\\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geqq 0,\\ (x_1+x_2+x_3+x_4) &\to \min; \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} -2x_1-x_2-x_3+x_4+2x_5 &\leqq 2,\\ x_1-2x_3+x_4-2x_5 &\leqq 3,\\ x_1+x_3-2x_4-2x_5 &\geqq 0,\\ x_2-2x_4-2x_5 &\geqq 2,\\ -x_3-2x_4+x_5 &\geqq 3,\\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geqq 0,\\ (12x_1+5x_2+20x_3+10x_4+24x_5) &\to \min; \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} 2x_1+x_2-x_3-3x_4 &\leqq 0,\\ -x_2+x_3-x_4 &\leqq 2,\\ x_1+x_3-x_4 &\geqq 3,\\ -x_1-x_2+x_3+x_4 &\leqq 1,\\ x_1-x_4 &\leqq 0,\\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geqq 0,\\ (2x_1+x_2+5x_3) &\to \min. \end{aligned}$$

78. Írjon fel egy olyan normál feladatot, melynek optimális megoldása az $\mathbf{x}$ vektor, ha

a) $\mathbf{x}^* = [3; 4; 5]$, *b)* $\mathbf{x}^* = [2; 0; 7]$,
c) $\mathbf{x}^* = [1; 0; 1; 0]$, *d)* $\mathbf{x}^* = [0; 0; 0; 0]$!

79. Írjon fel egy olyan normál feladatot, amelynek alternatív optimumai vannak, és egy optimális megoldása az **x** vektor, ha

a) $\mathbf{x}^* = [4; 5; 7]$, *b)* $\mathbf{x}^* = [3; 1; 1; 4]$,
c) $\mathbf{x}^* = [4; 1; 0; 2]$, *d)* $\mathbf{x}^* = [0; 0; 0; 0]$!

80. Írjon fel egy olyan normál feladatot, melynek az **x** vektor degenerált bázismegoldása, ha

a) $\mathbf{x}^* = [3; 5; 4]$, *b)* $\mathbf{x}^* = [7; 0; 3; 2]$,
c) $\mathbf{x}^* = [1; 2; 1; 2]$, *d)* $\mathbf{x}^* = [0; 0; 0; 0]$!

81. Írjon fel egy olyan normál feladatot, amelynek végtelen sok optimális megoldása van, de nincs alternatív optimuma, és optimális bázismegoldása az **x** vektor, ha

a) $\mathbf{x}^* = [6; 2; 1]$, *b)* $\mathbf{x}^* = [5; 3; 0; 1]$,
c) $\mathbf{x}^* = [4; 3; 2; 1]$, *d)* $\mathbf{x}^* = [0; 0; 0; 0]$!

82. Írjon fel egy olyan normál feladatot, amelynek nincs optimális megoldása, de egy lehetséges nem bázismegoldása az **x** vektor, ha

a) $\mathbf{x}^* = [3; 7; 9]$, *b)* $\mathbf{x}^* = [1; 3; 1; 7]$,
c) $\mathbf{x}^* = [2; 1; 0; 2]$, *d)* $\mathbf{x}^* = [0; 0; 0; 0]$!

83. Írjon fel egy olyan normál feladatot, amelynek nincs optimális megoldása, de egy lehetséges bázismegoldása az **x** vektor, ha

a) $\mathbf{x}^* = [3; 7; 4]$, *b)* $\mathbf{x}^* = [4; 5; 4; 5]$,
c) $\mathbf{x}^* = [5; 0; 0; 3]$, *d)* $\mathbf{x}^* = [0; 0; 0; 0]$!

84. Az alábbi táblázatokat egy-egy normál feladat megoldása során kaptuk. Írja fel az eredeti feladatok optimális megoldását (vagy optimális megoldáshalmazát), és mondja meg, hogy a duális feladatnak hány optimális megoldása van!

a)

	x_1	x_2	u_4	u_2	
u_1	0	0	—1	1	6
x_4	0	1	0	1	4
u_3	1	1	0	0	10
x_3	1	0	1	—1	4
	—2	—2	—6	—1	—80

$x_0^* = [0; 0; 4; 4]$

$z_0 = 80$

A duális feladatnak egy opt. megoldása van!

$u_0^* = [0, 1, 0, 6]$

$x_0^{(1)} = [0,0,8,8]$
$x_0^{(2)} = [4,0,4,0]$
$z_0 = 56$
$x_0 = \lambda x_0^{(1)} + (1-\lambda) x_0^{(2)}$
$u_0^* = [3,4,0,0]$

b)

	x_1	x_2	u_2	u_1	
x_4	2	1	0	1	8
x_3	1	2	1	0	8
u_3	—1	—1	—1	0	0
u_4	—1	—1	0	—1	0
	0	—8	—4	—3	—56

az 5-ös indexű sorjából

c)

	x_1	u_1	x_3	u_4	u_5	
x_2	2	0	1	1	1	12
u_2	0	—1	0	0	1	6
x_5	2	—1	1	1	2	10
x_4	1	—1	0	1	1	4
	—29	15	—7	—20	—28	—168

Az eredeti normál feladatnak nincs opt. m.-a (A célf. nem korlátos) A duál feladatnak még lehetséges megoldása sincs.

d)

	x_1	u_3	x_3	u_4	x_5	
u_1	0	0	0	—1	—1	1
u_2	3	0	1	1	—1	18
x_2	0	1	1	0	—1	12
x_4	1	1	1	1	0	20
	—3	—10	—5	—6	0	—168

A primál feladatnak egy opt. bázismegoldása van: $x_0^* = [0,12,0,20,0]$ és végtelen sok optimális, de nem bázismegoldása van $x_0 = [0, 12+k, 0, 20, k]$ $k \geq 0$

$u_0^* = [0,0,10,6]$

85. Egy normál feladat megoldása során a következő táblázatig jutottunk:

	u_3	u_1	x_3	x_4	x_5	
x_2	0	1	0	1	0	12
u_2	—1	1	3	1	1	5
x_1	1	—1	—1	—1	0	2
u_4	0	1	1	2	1	12
	—3	0	5	2	2	—42

az alt. opt.-hoz mind e két a helyen választható gen. elem

a) Írja fel a feladat optimális megoldását! 1 db transzf. $z_0 = 52$
b) Írja fel a duális feladat optimális megoldását! $[2, 2, 1, 0]$
c) Írja fel az eredeti feladatot a szokásos formában!

két transzf.
$x_1 \leftrightarrow u_1$
$x_1 \leftrightarrow u_3$

$x_0^{(1)} = [7,7,0,5,0]^*$
$x_0^{(2)} = [2,12,0,0,5]^*$

86. Egy normál feladat megoldása során az alábbi táblázatig jutottunk:

c)-hez: $x_2 \to u_4$, $x_4 \to u_3$

	x_1	u_4	x_3	u_3	x_5	
u_1	1	0	1	0	1	20
u_2	1	—1	0	1	0	20
x_4	1	0	1	1	0	40
x_2	0	1	0	—1	1	10
	0	—8	0	0	0	—400

a) Írjon fel legalább három olyan bázismegoldást, mely egyúttal optimális megoldás is!
b) Írja fel a duál feladat optimális megoldását! [0, 0, 0, 8]
c) Írja fel az eredeti feladat célfüggvényét!

87. Egy normál feladat egy optimális bázismegoldását a következő táblázat mutatja:

	u_1	x_1	u_3	u_4	x_4	
x_3	0	0	1	0	4	8
u_1	1	0	—1	1	1	2
x_5	1	1	0	—1	0	4
x_2	—1	1	$\boxed{1}$	$\boxed{—1}$	1	0
	—3	—3	0	—2	—7	—22

$x_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$

a) Hány optimális megoldása van a primál, illetve a duál feladatnak?
b) Írja fel a primál feladat optimális megoldásait!
c) Írja fel a duál feladat optimális megoldásait!
d) Határozza meg az eredeti feladat feltételrendszerét!

$u_1^* = [0, 3, 0, 2]$
$u_2^* = [0, 1, 2, 0]$

88. Egy normál feladat megoldása során az alábbi táblázatot kaptuk:

	u_1	x_1	u_3	u_4	x_5	
x_2	1	0	1	—1	—1	5
u_2	0	1	1	—1	2	2
x_3	0	—1	0	1	—1	3
x_4	—1	0	1	1	0	4
	—2	0	—1	—3	—1	—20,5

a) Írja fel a normál feladat optimális megoldásainak halmazát!
b) Írja fel a duál feladat optimális megoldását!
c) Optimális megoldása-e az eredeti feladatnak az $\mathbf{x}^* = [1; 5; 4; 4; 0]$ vektor?
d) Határozza meg az eredeti feladat induló szimplex táblázatát!

89. Egy normál feladat egy alternatív optimális megoldását a következő szimplex táblázat mutatja:

	x_1	u_1	u_2	x_2	u_3	
x_5	1	—1	2	1	1	5
x_3	0	0	1	0	1	6
x_4	—1	0	1	1	0	1
u_4	1	1	0	1	0	2
	—1	0	—2	—1	—3	—17

a) Írja fel a normál feladat optimális megoldásait!
b) Írja fel a duál feladat optimális megoldását!
c) Milyen α érték esetén lesz az eredeti feladatnak optimális megoldása az $\mathbf{x}^* = [0; 0; 6; 1; \alpha]$ vektor? $x_0^{(1)} = [0, 0, 6, 1, 5]$ $x_0^{(2)} = [0, 0, 6, 1, 7]$ $\lambda = 1$ $\lambda = 0$
d) Írja fel az eredeti feladatot! $\lambda \cdot 5 + (1-\lambda) 7 = 7 - 2\lambda$ $0 \le \lambda \le 1$

$5 \le \alpha \le 7$

90. Egy normál feladat megoldása során az alábbi táblázatig jutottunk:

	x_1	x_2	x_3	x_4	u_3	
u_1	$\boxed{1}$	3	2	2	1	20
u_2	2	5	5	2	2	48
x_5	0	2	0	1	1	16
u_4	—1	—1	—1	0	—1	0
	2	—6	4	—2	—5	c

$[20; 0; 0; 0; 16]$

a) Írja fel a primál feladat összes optimális megoldását! $x^{(2)} = [4, 0, 8, 0, 16]$
b) Optimális megoldása-e a feladatnak az $\mathbf{x}_1^* = [8; 0; 5; 0; 16]$ vektor? nem
c) Milyen α érték esetén lesz optimális megoldása a normál feladatnak az $\mathbf{x}_2^* = [12; 0; 5; 0; \alpha]$ vektor?
d) Lehetséges megoldása-e a feladatnak az $\mathbf{x}_3^* = [2; 1; 1; 1; 0]$ vektor? nem
e) Határozza meg c értékét!

$c = -80$

két trafóval!

91. Egy normál feladat megoldása során az alábbi táblázatig jutottunk:

$x_0^{(1)} = [0, 10, 30, 0, 30]$

$x_0^{(2)} = [0, 0, 20, 10, 10]$

$\lambda \cdot 30 + (1-\lambda) 20 = 26$

$\lambda = 0,6$

$0,6\, x^{(1)} + 0,4\, x^{(2)} = [\alpha, \beta, 26, \gamma, \delta]$

	u_3	x_2	x_3	x_4	u_1	
x_5	0	1	—1	2	1	10
u_2	—1	—1	1	0	0	20
x_1	1	1	0	1	0	10
u_4	1	2	0	1	—1	30
	—5	—2	4	2	—1	c

a) Írja fel a primál feladat optimális bázismegoldásait és az optimális megoldások halmazát!

b) Határozza meg α, β, γ, δ értékét úgy, hogy az $\mathbf{x}_1^* = [\alpha; \beta; 26; \gamma; \delta]$ vektor optimális megoldása legyen a normál feladatnak!

c) Milyen p érték esetén lesz az $\mathbf{x}_2^* = [4; 0; 25; p; p]$ vektor az eredeti feladat lehetséges megoldása? Itt kell írni az eredeti feladatot, behelyettesíteni x_2^*-ot és a kapott egyenlőtlenségrendszert megoldani

d) Léteznek-e olyan q, r, s, t pozitív számok, hogy az $\mathbf{x}_3^* = [0; q; r; s; t]$ vektor lehetséges bázismegoldása legyen a normál feladatnak?

e) Határozza meg c értékét! vissza az eredeti feladatra, ha megvannak x-ek a célf. együtthatói, $x^{(1)}$-el pl. kiszámolható z_0 és abból vissza számolható c

kijön $0 \leq p \leq 1$

92. Egy normál feladat optimális megoldását mutatja a következő táblázat:

	x_1	x_2	u_1	u_2	
x_3	1	0	1	0	8
u_4	1	1	1	1	18
x_3	1	2	0	1	22
u_4	—1	1	—1	0	D
	—12	—4	—17	B	—236

a) Határozza meg a B paraméter értékét!

b) Mekkora a D paraméter értéke, ha azt tudjuk, hogy az $\mathbf{x}_1^* = [1; 5; 5; 4]$ vektor a feladatnak lehetséges megoldása, de az $\mathbf{x}_2^* = [1; 6; 5; 2]$ vektor a feladatnak nem lehetséges megoldása, továbbá a D egész szám?

c) Lehetséges megoldása-e a feladatnak az $\mathbf{x}_3^* = [4; 3; 4; 3]$ vektor?

d) Határozza meg az α, β, γ paraméterek értékét, ha azt tudjuk, hogy az $\mathbf{x}_4^* = [0; \alpha; \beta; \gamma]$ vektor a normál feladatnak lehetséges bázismegoldása, és α, β, $\gamma > 0$!

e) Mekkora a célfüggvény értéke az $\mathbf{x}_4$ bázismegoldásnál?

az új pont megoldástáblája kell kész! 1. még 37-ből

93. Egy normál feladat megoldása során a következő táblázatig jutottunk:

	u_1	u_2	x_3	x_4	x_5	
x_1	1	0	1	0	1	B
x_2	0	1	1	1	2	12
u_3	—1	2	2	2	4	20
u_4	—1	—1	—1	0	0	D
	—1	—5	0	2	—1	—70

a) Határozza meg a B paraméter értékét!

b) Mekkora a D értéke, ha azt tudjuk, hogy a feladat egyik alternatív optimuma degenerált?

c) Milyen határok közötti értékeket vehet fel az α paraméter, ha azt tudjuk, hogy az $\mathbf{x}_1^* = [\alpha; \alpha; 5; 1; \alpha]$ vektor lehetséges megoldása a normál feladatnak?

d) Határozza meg a p, q, r paraméterek értékét, ha azt tudjuk, hogy az $\mathbf{x}_2^* = [p; q; 0; 0; r]$ vektor lehetséges bázismegoldása az eredeti feladatnak, és $p, q, r > 0$!

e) Mekkora a célfüggvény értéke az $\mathbf{x}_2$ bázismegoldásnál?

94. Egy normál feladat optimális megoldását az alábbi táblázat mutatja:

	u_1	x_2	x_3	u_3	u_2	
x_1	1	1	1	0	0	100
x_5	1	0	0	—1	1	A
x_4	—1	0	0	1	0	50
u_4	—1	1	—1	1	—1	B
	—8	D	—4	—2	—2	—1260

legalább 0 és ha éppen annyi, akkor az opt. megoldás degenerált!

Erről a normál feladatról még azt kell tudni, hogy csak egy optimális megoldása van, és a célfüggvényben szereplő együtthatók között van zérus is.

a) Határozza meg az A paraméter értékét! l. 381. old. 3 transzformációval vissza az eredetire!

b) Legalább mekkora a B paraméter értéke? Milyen B érték esetén lenne az optimális megoldás degenerált?

c) Határozza meg a D paraméter pontos értékét! Az induló táblában az x_2 együtthatója lesz 0, és $D = -10$

d) Határozza meg, hogy az $\mathbf{x}_1^* = [10; 20; 30; 40; 40]$ vektor lehetséges megoldása-e az eredeti feladatnak! A; B; D már ismert értékei mellett x_1^* behelyettesítése induló

e) Milyen B érték esetén léteznek olyan $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$ valós számok, hogy az $\mathbf{x}_2^* = [\alpha; \beta; 0; \gamma; \delta]$ vektor nem degenerált lehetséges bázismegoldása legyen az eredeti normál feladatnak?

94. az a) pontban előállított induló [illegible]

Táblázatból leolvasható feltételeket ad a lehetséges megoldás

95. Az alábbi táblázat egy normál feladat optimális megoldását mutatja:

	x_1	u_1	x_3	x_4	u_4	
x_2	2	α	-1	-1	-1	4
u_2	-1	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	2
u_3	4	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	6
x_5	-1	0	1	1	1	18
	-1	-4	-3	-3	-5	-134

a) Határozza meg az α paraméter értékét!

b) Írja fel az eredeti normál feladatot a szokásos formában!

c) Legfeljebb mekkora lehet a β értéke, ha azt akarjuk, hogy az $\mathbf{x}_1^* = [1; 6; 3; \beta; 1]$ vektor lehetséges megoldása legyen az eredeti feladatnak?

d) Léteznek-e olyan zérustól különböző k, l, m, n valós számok, hogy az $\mathbf{x}_2^* = [0; k; l; m; n]$ vektor lehetséges bázismegoldása legyen a normál feladatnak?

e) Hogyan kellene megváltoztatni (mekkorának kellene lennie) az eredeti feladat célfüggvényében az x_1 változó együtthatóját ahhoz, hogy a feladatnak alternatív optimuma legyen?

96. Egy normál feladat megoldása során az alábbi táblázatig jutottunk:

	x_1	x_2	u_2	u_4	x_5	
u_1	1	0	-1	1	1	8
x_3	α	0	1	γ	0	2
u_3	1	1	0	0	1	8
x_4	0	β	0	1	0	7
	10	10	-8	-1	10	c

a jobb alsó sarokban 0-nak kell állni, ebből kijön A

a) Határozza meg az α, β, γ és c paraméterek értékét, ha azt tudjuk, hogy az eredeti feladat célfüggvénye: $(18x_1+19x_2+8x_3+9x_4+10x_5)$ és ennek maximumát keressük!

b) Írja fel az eredeti normál feladatot!

c) Határozza meg a normál feladat optimális bázismegoldásait!

d) Optimális megoldása-e a feladatnak az $\mathbf{x}_1^* = \left[2; \frac{7}{2}; 2; \frac{7}{2}; \frac{5}{2}\right]$ vektor?

e) Legfeljebb mekkora lehet a k és l paraméterek értéke, ha azt akarjuk, hogy az $\mathbf{x}_2^* = [2; 5; 2; k; l]$ vektor lehetséges megoldása legyen az eredeti normál feladatnak?

139. Három alkatrészt (A_1, A_2, A_3) három gépen (G_1, G_2, G_3) lehet megmunkálni. Mivel a gépek különböző típusúak és különböző életkorúak, azért az egyes alkatrészek megmunkálásának fajlagos időszükséglete az egyes gépeken különböző. Az alábbi táblázat mutatja az egyes gépeken egy alkatrész megmunkálásához szükséges időt (órában), az egyes alkatrészek eladási árát, valamint egy gépóra költségét (száz forintban) és az egyes gépek gépóra-kapacitását:

Gépek	Alkatrészek			1 gépóra költsége	Gépek kapacitása
	A_1	A_2	A_3		
G_1	0,2	0,1	0,05	30	40
G_2	0,6	0,3	0,2	10	60
G_3	0,2	0,1	0,3	20	30
Ár	10	16	12		

Feltéve, hogy mindegyik gép bármelyik alkatrész megmunkálására alkalmas, és az A_1 alkatrészből legfeljebb annyit szabad megmunkálni, mint a másik kettőből összesen; írja fel annak a termelési programnak megfelelő modellt, amely annak a pénzösszegnek a maximumát eredményezi, amelyet úgy kapunk, hogy az árbevételből levonjuk a gépóraköltséget. (Azt is határozza meg, hogy melyik gépen hány darabot célszerű — az adott feltételek mellett és cél esetén — megmunkálni az egyes alkatrészekből!)

140. Határozza meg, hogy az alábbi állítások közül melyik igaz és melyik hamis! (Válaszát indokolja!)

i *a)* Egy feladatnak mindig van optimális megoldása, ha a lehetséges megoldások halmaza korlátos és nem üres.

h *b)* Ha egy normál feladatnak pontosan két alternatív optimális bázismegoldása van, akkor az optimális megoldások halmaza mindig korlátos.

i *c)* A lineáris programozási feladatok lehetséges megoldásainak halmaza zárt.

i *d)* Egy normál feladatnak mindig van lehetséges megoldása.

h *e)* Egy normál feladatnak mindig van optimális megoldása. ha a célf nem korlátos

i *f)* Az $\mathbf{Ax} \leqq \mathbf{b}$, $\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}$, $\mathbf{c^*x} \to \max$ feladatnak mindig van optimális megoldása, ha $\mathbf{A} > \mathbf{0}$ és $\mathbf{b} > \mathbf{0}$. c_j feltétel $A > 0$ esetén mindig lehet gen. elemet választani

h *g)* Ha egy normál feladatnak van lehetséges megoldása, akkor duáljának is van lehetséges megoldása. $z \leq w$ z-ben tartozó lehetséges megoldás de a nem létezik w, ha nem

h *h)* Ha egy normál feladat duálisának nincs lehetséges megoldása, akkor a normál feladatnak sincs lehetséges megoldása. → nem korlátos max

i *i)* Ha egy normál feladat duálisának nincs lehetséges megoldása, akkor a normál feladatnak nincs optimális megoldása.

vagy nem korlátos z L-en, vagy egyáltalán nincs L sem } a primál adatban h *j)* Ha egy feladatnak alternatív optimumai vannak és ezek közül egyről tudjuk, hogy az degenerált, akkor minden optimális megoldása degenerált. igaz tehát minden

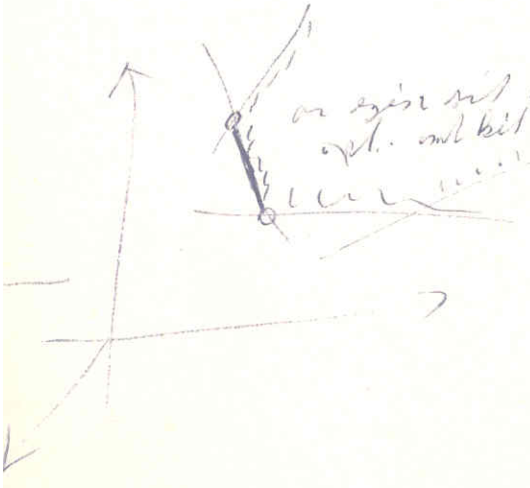
h *k)* A szimplex módszernél a legnagyobb célfüggvénybeli elem felett kell a generáló elemet választani, mert ekkor nő legtöbbel a célfüggvényérték.

i *l)* Van olyan feladat, melynek minden lehetséges megoldása egyúttal optimális megoldás is.

h *m)* A normál feladat minden lehetséges megoldása mindig előállítható az L halmaz csúcspontjainak konvex lineáris kombinációjaként.

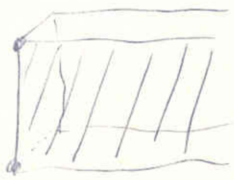
i *n)* Ha egy normál feladatnak lehetséges megoldása az $\mathbf{x}_1^* = [1; 3; -3; 7]$ és az $\mathbf{x}_2^* = [1; 6; 6; 1]$ vektor, akkor lehetséges megoldása az $\mathbf{x}^* = [1; 5; 3; 3]$ vektor is. $\lambda \underline{x}_1 + (1-\lambda)\underline{x}_2 = \underline{x}$ -ből $\lambda = \frac{1}{3}$ mindig

h *o)* Ha egy feladatnak van optimális megoldása, akkor az csak az L halmaz csúcspontjában lehet.



az egész oldal L opt. mert két csúcs van

csak több dim-s térben! síkban nem megy.



legyen a L egy irány a ∞-be nyúló hasáb és a sraffozott oldala az opt. megoldások halmaza két opt. csúcs van, az oldal nyúlik a ∞-be megy!

9. A módosított normál feladat megoldása

A primál szimplex módszerrel ez ideig csak normál alakú feladatokat tudunk megoldani. A valóságban azonban nemcsak ilyen alakú feladatok vannak. Valamivel nehezebb a helyzet, ha a feladat feltételei között szigorú egyenlőségek is szerepelnek. Az

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1\mathbf{x} &\leqq \mathbf{b}_1, \\ \mathbf{A}_2\mathbf{x} &= \mathbf{b}_2, \\ \mathbf{x} &\geqq 0, \\ \mathbf{b}_1 \geqq \mathbf{0},\ \mathbf{b}_2 &\geqq \mathbf{0}, \\ z = \mathbf{c}^*\mathbf{x} &\to \max \end{aligned}$$

alakú feladatot *módosított normál feladatnak* nevezzük.

Látható, hogy itt a feltételeknek két csoportja szerepel. Az egyik csoportban csupa $\leqq$ irányú egyenlőtlenség, míg a másikban csupa egyenlőség van. Tegyük fel, hogy az $\mathbf{A}_1$ $(k\times n)$, az $\mathbf{A}_2$ pedig $(l\times n)$ típusú mátrix! Így összesen $k+l$ feltételünk és n ismeretlenünk van. Írjuk most fel a fenti módosított normál feladat kanonikus alakját!

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1\mathbf{x}+\mathbf{E}\mathbf{u} &= \mathbf{b}_1, \\ \mathbf{A}_2\mathbf{x} \qquad &= \mathbf{b}_2, \\ \mathbf{x} \geqq \mathbf{0},\ \mathbf{u} &\geqq \mathbf{0}, \\ \mathbf{b}_1 \geqq \mathbf{0},\ \mathbf{b}_2 &\geqq \mathbf{0}, \\ z = \mathbf{c}^*\mathbf{x} &\to \max. \end{aligned}$$

Összevontabb formában:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{E} \\ \mathbf{A}_2 & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{x} \geqq \mathbf{0},\ \mathbf{u} \geqq \mathbf{0},$$
$$z = \mathbf{c}^*\mathbf{x} \to \max.$$

Ennél a kanonikus alaknál az együtthatómátrix $(k+l)\times(n+k)$ típusú, és egyáltalán nem biztos, hogy tartalmazza az oszlopvektortér triviális bázisát, vagyis a $k+l$ számú egységvektort. Ezért nem áll módunkban egy kiinduló lehetséges bázismegoldást felírni. Míg a normál alakú feladatnak mindig van megvalósítható megoldása, tehát az L halmaz sosem üres, addig a módosított normál feladatnál az L halmaz üres is lehet. A módosított normál feladatot ún. *mesterséges* (*nem valódi*) *eltérésváltozók* bevezetésével átalakíthatjuk normál feladattá. Így megoldása is, bizonyos módosítással visszavezethető normál feladat megoldására.

A feladat megoldása érdekében mindazon feltételekhez, amelyeknek egyenlőség formájában kell teljesülniök, rendeljünk hozzá egy-egy mesterséges eltérésváltozót oly módon, mintha azok eredetileg $\leqq$ formájában lettek volna adva. Ezeket a változókat csillaggal jelöljük meg, ami azt jelenti, hogy az eredeti feltételek csak akkor teljesülnek, ha a csillaggal megjelölt eltérésváltozók értéke zérus. Ezek alapján a feladat kanonikus alakja:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{A}_1\mathbf{x}+\mathbf{E}_1\mathbf{u}_1 = \mathbf{b}_1,\\
&\mathbf{A}_2\mathbf{x}+\mathbf{E}_2{}^*\mathbf{u}_2 = \mathbf{b}_2,\\
&\mathbf{x} \geqq \mathbf{0},\ \mathbf{u}_1 \geqq \mathbf{0},\ {}^*\mathbf{u}_2 \geqq \mathbf{0},\\
&z = \mathbf{c}^*\mathbf{x} \rightarrow \max.
\end{aligned}$$

Ennek a kanonikus alaknak a feltételrendszerében már szerepel a $(k+l)$-edrendű egységmátrix, vagyis a feltételrendszer együtthatómátrixa által meghatározott oszlopvektortér triviális bázisa. Így fel tudjuk írni a mesterséges eltérésváltozókkal kiegészített kanonikus alakhoz tartozó normál feladat induló szimplex táblázatát, amely a következő:

	$\mathbf{x}^*$	
$\mathbf{u}_1$	$\mathbf{A}_1$	$\mathbf{b}_1$
${}^*\mathbf{u}_2$	$\mathbf{A}_2$	$\mathbf{b}_2$
	$\mathbf{c}^*$	0

Ez a szimplex táblázat csak olyan megoldást ad, amelynél az eredeti feladat feltételrendszerének első csoportjába tartozó feltételek ($\mathbf{A}_1\mathbf{x} \leqq \mathbf{b}_1$) teljesülnek, míg a második csoportba tartozók ($\mathbf{A}_2\mathbf{x} = \mathbf{b}_2$) nem teljesülnek. Ez tehát az eredeti feladatra nem ad megvalósítható megoldást; egy megvalósítható bázismegoldását adja viszont az

$$\begin{aligned}
&\mathbf{A}_1\mathbf{x} \leqq \mathbf{b}_1,\\
&\mathbf{A}_2\mathbf{x} \leqq \mathbf{b}_2,\\
&\mathbf{x} \geqq \mathbf{0},\\
&\mathbf{b}_1 \geqq \mathbf{0},\ \mathbf{b}_2 \geqq \mathbf{0},\\
&z = \mathbf{c}^*\mathbf{x} \rightarrow \max
\end{aligned}$$

normál feladatnak. Feladatunk egy megvalósítható bázismegoldását akkor kapjuk, ha az ${}^*\mathbf{u}_2$-vel jelölt változóknak megfelelő egységvektorok kikerültek a bázisból. Arra van tehát szükség, hogy a mesterséges eltérésváltozókkal bővített feladatot megfelelő bázistranszformációk segítségével alakítsuk úgy, hogy valamennyi ${}^*\mathbf{u}_i$változó kikerüljön a bázisból.

Ha ez nem valósítható meg — vagyis a feladatnak nincs megoldása —, azt ki tudjuk mutatni. Aztán amennyiben ez sikerült, tehát egy megvalósítható bázismegoldásunk van, akkor a kapott programot addig kell javítani, amíg az optimális megoldáshoz eljutunk. Kérdés azonban az, hogy a generáló elemeket milyen szempontok szerint válasszuk, hogy előbb egy megvalósítható megoldást, majd ennek fokozatos javításával az optimális megoldást kapjuk meg. Ahhoz, hogy erre választ adhassunk, még néhány dolgot meg kell vizsgálnunk.

Az

$$\mathbf{A}_2\mathbf{x} \leqq \mathbf{b}_2$$

feltételrendszer mindkét oldalát szorozzuk meg balról az ún. összegező-sorvektorral:

$$\mathbf{1}^*\mathbf{A}_2\mathbf{x} \leqq \mathbf{1}^*\mathbf{b}_2.$$

Látható, hogy az $\mathbf{1}^*\mathbf{b}_2$ szám felső korlátja az $\mathbf{1}^*\mathbf{A}_2\mathbf{x}$ függvénynek. Mivel eredeti feladatunk feltételei között szerepel az $\mathbf{A}_2\mathbf{x} = \mathbf{b}_2$ egyenlőség, azért a fenti egyenlőtlenségből következik, hogy a módosított normál feladatnak csak akkor van megvalósítható megoldása, ha a feltételei által meghatározott halmazon az $\mathbf{1}^*\mathbf{A}_2\mathbf{x}$ függvény fel tudja venni maximális értékül az $\mathbf{1}^*\mathbf{b}_2$ számot. Így elsősorban az $\mathbf{1}^*\mathbf{A}_2\mathbf{x}$ függvény maximumát kell keresni az L halmazon, azért ezt is tekinthetjük célfüggvénynek, mégpedig a feladat szempontjából másodlagosnak, míg a szimplex módszer alkalmazásának szempontjából elsődlegesnek. Mi a feladat szempontjából nézzük, és ezért az $\mathbf{1}^*\mathbf{A}_2\mathbf{x}$ függvényt a továbbiakban *másodlagos célfüggvénynek* nevezzük. *Ennek alapján vissza tudjuk vezetni a módosított normál feladat megoldását normál feladat megoldására.*

A következő módon járunk el .Megkezdjük a feladat megoldását a másodlagos célfüggvény, az $\mathbf{1}^*\mathbf{A}_2\mathbf{x}$ függvény szerint. Ennek megfelelően választjuk a generáló elemeket, és végezzük az elemi bázistranszformációkat mindaddig, amíg kiderül, hogy

a) vagy fel tudja venni a másodlagos célfüggvény az $\mathbf{1}^*\mathbf{b}_2$ értéket az adott feltételek mellett, és akkor a módosított normál feladat egy megvalósítható megoldásához juthatunk;

b) vagy nem teljesíthető az $\mathbf{1}^*\mathbf{A}_2\mathbf{x} = \mathbf{1}^*\mathbf{b}_2$ feltétel és akkor a feladatnak nincs megoldása (a feltételrendszeren belül ellentmondás van). A módosított normál feladat megoldásának ezt a módját *kétfázisú* (kétfokozatú) *szimplex eljárásnak* nevezzük.

Az elmondottaknak megfelelően az alábbi kibővített táblázatból indulunk ki:

	$\mathbf{x}^*$	
$\mathbf{u}_1$	$\mathbf{A}_1$	$\mathbf{b}_1$
$^*\mathbf{u}_2$	$\mathbf{A}_2$	$\mathbf{b}_2$
	$\mathbf{c}^*$	0
	$\mathbf{1}^*\mathbf{A}_2$	$\mathbf{1}^*\mathbf{b}_2$

A táblázat egy sorban — az utolsó sorában — különbözik a megfelelő szimplex táblázattól. Ez a kiegészítő sor a másodlagos célfüggvény együtthatóit tartalmazza megfelelő sorrendben. Az utolsó eleme pedig azt a maximális értéket mutatja, amelyet a másodlagos célfüggvénynek fel kell vennie ahhoz, hogy megvalósítható megoldáshoz jussunk. Megvalósítható megoldáshoz pedig akkor jutunk, ha a mesterséges eltérésváltozók kikerülnek a bázisból. A csillaggal megjelölt változók bázisból való kikerülésük után nem kerülhetnek újra vissza a bázisba, mert akkor nem kaphatunk megvalósítható megoldást. Ezért nem is tüntetjük fel őket azokban a táblázatokban, amelyeket a bázisból való kikerülésük után kapunk. Ezzel kapcsolatban bizonyítható a következő tétel:

Ha a kiindulásul szolgáló módosított normál feladatnak van megvalósítható megoldása, akkor a másodlagos célfüggvény szerint végezve a programozást, a csillaggal megjelölt eltérésváltozók sorra kikerülnek a bázisból. A visszamaradó táblázatban pedig a kiegészítő sor összes eleme zérussá válik.

Ha a csillagos eltérésváltozók kikerültek a bázisból, akkor a táblázat a módosított normál feladat egy lehetséges bázismegoldását mutatja. Ettől kezdve — ha a további generáló elemeket a primál szimplex eljárásnál megadott módon választjuk — minden táblázat a módosított normál feladat egy megvalósítható bázismegoldását adja. A célfüggvény értékét addig javítjuk, amíg az optimális megoldást meg nem kapjuk.

Ha a célfüggvény nem korlátos, akkor a módosított normál feladatnak nincs optimális megoldása.

Ha a másodlagos célfüggvény nem tudja felvenni a maximális értékét, akkor a módosított normál feladatnak nincs lehetséges megoldása. Ez a szimplex táblázatban úgy jelenik meg, hogy a kiegészítő sorban nincs pozitív elem, de az utolsó oszlop utolsó eleme pozitív. (Ez azt is jelenti, hogy a feladat feltételrendszere ellentmondásos.)

Az eljárás jobb megértése céljából oldjuk meg a következő módosított normál feladatot!

$$
\begin{aligned}
x_1+4x_2+x_3+2x_4 \qquad & \leqq 90,\\
3x_2 \quad + x_4+2x_5 & \leqq 50,\\
x_1+2x_2 \quad + x_4+ x_5 & = 60,\\
x_1 \quad +x_3 \quad + x_5 & = 80,\\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \qquad & \geqq 0,\\
z = (4x_1+3x_2+x_3+5x_4+x_5) & \rightarrow \max.
\end{aligned}
$$

Ha a feltételrendszer jobb oldalán álló mennyiségek kapacitásokat jelentenek, akkor a harmadik és negyedik egyenlet megfelel annak a kikötésnek, hogy olyan programot kell készíteni, amelynél a harmadik és negyedik erőforrás 100%-ig kihasználódik. Természetesen a gazdasági élet területén sok más olyan feltétel van, melyek matematikai formája egyenlet.

A feladat induló táblázata:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
u_1	1	4	1	2	0	90
u_2	0	3	0	1	2	50
$*u_3$	$\boxed{1}$	2	0	1	1	60
$*u_4$	1	0	1	0	1	80
	4	3	1	5	1	0
	2	2	1	1	2	140

Mivel a harmadik és negyedik feltételnek egyenlőség formájában kell teljesülniük, azért a nekik megfelelő eltérésváltozók nem valódiak, és így azokat csillaggal jelöltük meg. A másodlagos célfüggvény együtthatóit úgy kaphatjuk egyszerűen, hogy a táblázat belső négyzetének utolsó két sorát összeadjuk. Ez a táblázat még nem ad megvalósítható megoldást. A generáló elemet most a másodlagos célfüggvénynek megfelelően választjuk, vagyis ott, ahol a legnagyobb mértékben javul a másodlagos célfüggvény értéke. Jelen esetben a harmadik sor első eleme lesz a generáló elem. Mivel az $*u_3$ kikerül a bázisból, azért a neki megfelelő oszlopot elhagyjuk:

	x_2	x_3	x_4	x_5	
u_1	2	1	1	—1	30
u_2	3	0	1	2	50
x_1	2	0	1	1	60
$*u_4$	—2	$\boxed{1}$	—1	0	20
	—5	1	1	—3	—240
	—2	1	—1	0	20

A másodlagos célfüggvény sorának csak a második eleme pozitív, azért csak ebben az oszlopban lehet generáló elemet választani. A generáló elem választása egyértelmű. Most az $*u_4$ eltérésváltozónak megfelelő oszlop is elmarad:

	x_2	x_4	x_5	
u_1	4	$\boxed{2}$	—1	10
u_2	3	1	2	50
x_1	2	1	1	60
x_3	—2	—1	0	20
	—3	2	—3	—260
	0	0	0	0

Látható, hogy a csillaggal jelölt változók eltűntek, ugyanakkor a másodlagos célfüggvény sorának minden eleme zérussá vált. Ez a táblázat a feladat egy megvalósítható megoldását adja, mely a következő:

$$\mathbf{x}^* = [60;\ 0;\ 20;\ 0;\ 0], \quad z = 260.$$

Meggyőződhetünk róla, hogy ez a vektor feltételeinket kielégíti. A továbbiakban a javításokat az eredeti célfüggvénynek megfelelően végezzük el. Mivel a táblázat utolsó sorában (nem a kiegészítő sorában) van még pozitív elem, és felette is található pozitív szám, azért a program még javítható. A szokásos módon elvégezzük a transzformációt:

	x_2	u_1	x_5	
x_4	2	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	5
u_2	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$	45
x_1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	55
x_3	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	25
	—7	—1	—2	—270

Most már az optimális programot kaptuk, mely a következő:

$$\mathbf{x}_0^* = [55;\ 0;\ 25;\ 5;\ 0] \text{ és } z = \mathbf{c}^*\mathbf{x}_0 = 270.$$

Látható, hogy $u_2 = 45$, vagyis csak a második feltétel nem teljesül egyenlőség formájában.

Változtassuk meg most eredeti feladatunkat oly módon, hogy a negyedik feltételnél a kapacitás 80 helyett 140 legyen! A többi komponens legyen változatlan. Oldjuk meg most feladatunkat! Az induló táblázat mellőzésével csak a második táblázatot írjuk fel.

	x_2	x_3	x_4	x_5	
u_1	2	$\boxed{1}$	1	—1	30
u_2	3	0	1	2	50
x_1	2	0	1	1	60
$*u_4$	—2	1	—1	0	80
	—5	1	1	—3	—240
	—2	1	—1	0	80

Most a második oszlop első elemét kell generáló elemnek választani. Az u_1 cserél szerepet az x_3-mal. Az u_1 nem csillagos változó, tehát a neki megfelelő oszlopot nem szabad elhagyni:

	x_2	u_1	x_4	x_5	
x_3	2	1	1	-1	30
u_2	3	0	1	$\boxed{2}$	50
x_1	2	0	1	1	60
$*u_4$	-4	-1	-2	1	50
	-7	-1	0	-2	-270
	-4	-1	-2	1	50

Csak a negyedik oszlop második elemét választhatjuk generáló elemnek.

	x_2	u_1	x_4	u_2	
x_3	$\frac{7}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	55
x_5	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	25
x_1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	35
$*u_4$	$-\frac{11}{2}$	-1	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{1}{2}$	25
	-4	-1	1	1	-220
	$-\frac{11}{2}$	-1	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{1}{2}$	25

Olyan táblázathoz jutottunk, amelynek a kiegészítő sorában nincs pozitív elem, és az utolsó oszlop utolsó eleme (25) pozitív szám. Ez azt jelenti, hogy a másodlagos célfüggvény, $\mathbf{1}^*\mathbf{A}_2\mathbf{x}$ nem tudja felvenni az $\mathbf{1}^*\mathbf{b}_2$ maximális értékét. Vagyis a feladatnak nincs lehetséges megoldása, a feladat feltételrendszerén belül ellentmondás van.

141. Oldja meg az alábbi feladatokat!

a)
$$\begin{aligned} x_1+\ x_2+\ x_3 \qquad &\leqq\ 8,\\ 2x_1-\ x_2 \qquad +\ x_4 &=12,\\ x_1, x_2, x_3, x_4 \qquad &\geqq\ 0,\\ (7x_1+3x_2+4x_3+6x_4) &\to \max; \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} x_1+2x_2+3x_3+x_4 &= 14,\\ x_2+\ x_3+x_4 &\leqq 8,\\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geqq 0,\\ (4x_1+3x_2+5x_3+6x_4) &\to \max; \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} 2x_1+4x_2+2x_3+x_4 &= 10,\\ 3x_1+\ x_2-\ x_3+x_4 &= 7,\\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geqq 0,\\ (6x_1+8x_2+3x_3+5x_4) &\to \max; \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} x_1+3x_2+x_3-2x_4 &\leqq 11,\\ x_1+\ x_2-x_3+\ x_4 &= 10,\\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geqq 0,\\ (4x_1+5x_2+6x_3+7x_4) &\to \max. \end{aligned}$$

142. Határozza meg az alábbi módosított normál feladatok optimális bázismegoldásait és az optimális megoldásokhoz tartozó célfüggvényértéket!

a)
$$\begin{aligned} x_1+2x_2+3x_3+\ x_4 &\leqq 16,\\ x_2+\ x_3+2x_4 &= 10,\\ x_1-\ x_2+\ x_3+\ x_4 &= 6,\\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geqq 0,\\ (4x_1-5x_2+6x_3+8x_4) &\to \max; \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 3x_1 \qquad +x_3 \qquad &= 15,\\ x_1+2x_2+x_3+2x_4 &\leqq 20,\\ 3x_2+x_3-\ x_4 &= 14,\\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geqq 0,\\ (5x_1+9x_2+5x_3-3x_4) &\to \max; \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} x_1-x_2+2x_3+x_4 &\leqq 8,\\ x_1+x_2-\ x_3+x_4 &= 10,\\ 2x_1+x_2+\ x_3-x_4 &= 16,\\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geqq 0,\\ (4x_1+3x_2-x_3+x_4) &\to \max; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d)\quad x_1+2x_2-x_3+2x_4 &= 10,\\ x_2+x_3-x_4 &\leqq 12,\\ x_1+x_2+\quad+x_4 &= 13,\\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geqq 0,\\ (2x_1+3x_2-x_3+3x_4) &\to \max. \end{aligned}$$

143. Írja fel az alábbi módosított normál feladatok induló szimplex táblázatát, és határozza meg az optimális megoldást adó táblázatot! Ezek alapján mondja meg, hogy az egyes feladatoknak hány optimális megoldása van, és írja fel ezeket!

$$\begin{aligned} a)\quad 3x_1+x_2\quad+x_4+x_5 &= 13,\\ x_1\quad+x_3-x_4+x_5 &\leqq 7,\\ 2x_1+x_2+x_3+x_4-x_5 &= 17,\\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geqq 0,\\ (6x_1+3x_2+2x_3+x_4-4x_5) &\to \max; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b)\quad 2x_1+x_2+2x_3+x_4+x_5 &= 21,\\ x_1+x_2+3x_3-x_4+x_5 &= 20,\\ x_1-x_2\quad+x_4+2x_5 &\leqq 12,\\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geqq 0,\\ (3x_1+x_2-x_3-x_4+x_5) &\to \max; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c)\quad 3x_1+2x_2+x_3+2x_4\quad &= 20,\\ 3x_1+x_2+2x_3+x_4+x_5 &\leqq 16,\\ x_1\quad+3x_3\quad+2x_5 &= 18,\\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geqq 0,\\ (4x_1+6x_2+5x_3+x_4+6x_5) &\to \max; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d)\quad x_1-x_2+x_3+x_4\quad &= 10,\\ x_2+2x_3-x_4+x_5 &= 12,\\ x_1\quad+x_3\quad+x_5 &= 14,\\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geqq 0,\\ (2x_1+2x_2+5x_3+3x_5) &\to \max. \end{aligned}$$

+

144. Írja fel az alábbi módosított normál feladatok duálisát úgy, hogy az egyenlőségi feltételeknek megfelelő eltérésváltozók előjelkötetlenek legyenek! Határozza meg az optimális megoldást adó táblázatokat, és ezek alapján írja fel mind a primál, mind a duál feladatok optimális megoldásait!

~~143-ból~~

4/13 ált-on a táblázat

$$\begin{aligned} a)\quad 2x_1+x_2+\quad+x_4 &= 20,\\ -x_2+6x_3+x_4 &\leqq 2,\\ x_1+x_2+x_3-x_4 &= 22,\\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geqq 0,\\ (3x_1+2x_2-x_3) &\to \max; \end{aligned}$$

u_1, u_2, u_3 4 feltétel

$u_2 \geq 0$

$2u_1+u_3 \geq 3$

$u_1-u_2+u_3 \geq 2$

$6u_2+u_3 \geq -1$

$u_1+u_2-u_3 \geq 0$

$w = 20u_1+2u_2+22u_3 \to \min$

b)
$$\begin{aligned}
x_1 \quad\;\; +2x_3+x_4+\ x_5 &\leqq 14,\\
x_1+2x_2+\ x_3-x_4+2x_5 &= 16,\\
x_1+\ x_2 \qquad +x_4 \qquad &= \ 9,\\
x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5 &\geqq \ 0,\\
(5x_1-2x_2+8x_3+8x_4-2x_5) &\to \max;
\end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned}
x_1+2x_2-x_3+x_4 &= 12,\\
x_1+x_2 \qquad\qquad &= 14,\\
-\ x_2+x_3+x_4 &= \ 8,\\
x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 &\geqq \ 0,\\
(x_1+x_2-2x_3-x_4) &\to \max;
\end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned}
3x_1+\ x_2-x_3+\ x_4+2x_5 &\leqq \ 8,\\
2x_2+x_3+\ x_4-\ x_5 &= 10,\\
x_1+2x_2+x_3+2x_4 \qquad &\leqq 13,\\
x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5 &\geqq 0,\\
(x_1+4x_2+2x_3+2x_4-2x_5) &\to \max.
\end{aligned}$$

145. Oldja meg a következő módosított normál feladatokat! Mindegyik feladatnál írja fel azt a (feladat megoldása során utolsónak elkészített) szimplex táblázatot, melynek alapján válaszolni tud az alábbi kérdésekre!

(1) Van-e a feladatnak lehetséges megoldása?
(2) Van-e a feladatnak optimális megoldása?
(3) Vannak-e a feladatnak alternatív optimumai?
(4) Hány optimális megoldása van a feladatnak?
(5) Van-e degenerált optimális bázismegoldása a módosított normál feladatnak?

a)
$$\begin{aligned}
2x_1 \qquad +x_3+2x_4+\ x_5 &= 100,\\
x_1+2x_2 \qquad +\ x_4+2x_5 &\leqq 120,\\
3x_1+\ x_2+x_3 \qquad +\ x_5 &= 120,\\
x_1+\ x_2+x_3+\ x_4+2x_5 &\leqq 130,\\
x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5 &\geqq 0,\\
(4x_1+7x_2+9x_3+5x_4+x_5) &\to \max;
\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned}
-2x_1+3x_2-x_3+\ x_4+x_5 &= 10,\\
2x_1+2x_2 \qquad +2x_4+x_5 &= \ 8,\\
3x_1-3x_2+x_3+\ x_4+x_5 &= 10,\\
x_1+2x_2+x_3+3x_4+x_5 &\leqq \ 8,\\
x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5 &\geqq 0,\\
(4x_1+2x_2+5x_3+x_4+2x_5) &\to \max;
\end{aligned}$$

10. Az általános alakú feladat megoldása

Az eddigiek során olyan lineáris programozási feladatok megoldásával még nem foglalkoztunk, ahol $\geqq$ irányú egyenlőtlenségek is szerepelnek a feltételek között. Az ilyen feladatokat *általános alakú* feladatoknak nevezzük, melyeknek mátrixalgebrai formája:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1\mathbf{x} &\leqq \mathbf{b}_1, \\ \mathbf{A}_2\mathbf{x} &= \mathbf{b}_2, \\ \mathbf{A}_3\mathbf{x} &\geqq \mathbf{b}_3, \\ \mathbf{x} &\geqq \mathbf{0}, \\ \mathbf{b}_1 \geqq \mathbf{0}, \quad \mathbf{b}_2 &\geqq \mathbf{0}, \quad \mathbf{b}_3 \geqq \mathbf{0}, \\ z &= \mathbf{c}^*\mathbf{x} \to \max. \end{aligned}$$

Az ilyen feladatok nemnegatív eltérésváltozók bevezetésével könnyen átalakíthatók módosított normál feladatokká oly módon, hogy minden $\geqq$ irányú egyenlőtlenség bal oldalából kivonunk egy nemnegatív v_i eltérésváltozót. Ezek alkalmazásával feladatunk a következő formában írható fel:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1\mathbf{x} &\leqq \mathbf{b}_1, \\ \mathbf{A}_2\mathbf{x} &= \mathbf{b}_2, \\ \mathbf{A}_3\mathbf{x} - \mathbf{E}\mathbf{v} &= \mathbf{b}_3, \\ \mathbf{x} \geqq \mathbf{0}, \quad \mathbf{v} &\geqq \mathbf{0}, \\ \mathbf{b}_1 \geqq 0, \quad \mathbf{b}_2 &\geqq 0, \quad \mathbf{b}_3 \geqq \mathbf{0}, \\ z &= \mathbf{c}^*\mathbf{x} \to \max. \end{aligned}$$

Ez pedig egy olyan módosított normál feladat, melynek induló táblázata:

	$\mathbf{x}^*$	$\mathbf{v}^*$	
$\mathbf{u}_1$	$\mathbf{A}_1$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{b}_1$
$^*\mathbf{u}_2$	$\mathbf{A}_2$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{b}_2$
$^*\mathbf{u}_3$	$\mathbf{A}_3$	$-\mathbf{E}$	$\mathbf{b}_3$
	$\mathbf{c}^*$	$\mathbf{0}^*$	0
	$\mathbf{1}^*\mathbf{A}_2+\mathbf{1}^*\mathbf{A}_3$	$-\mathbf{1}^*$	$\mathbf{1}^*\mathbf{b}_2+\mathbf{1}^*\mathbf{b}_3$

Oldjuk meg az alábbi általános alakú feladatot!

$$\begin{aligned}
x_1+2x_2 \quad\quad +x_4+x_5 &\leqq 110,\\
x_1 \quad\quad +2x_3+x_4+x_5 &= 80,\\
3x_2+\ x_3+x_4+x_5 &= 70,\\
2x_2 \quad\quad\quad +x_5 &\geqq 40,\\
x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5 \quad &\geqq 0,\\
z = (x_1+2x_2+3x_3+2x_4+3x_5) &\to \max.
\end{aligned}$$

A feladat utolsó feltétele $\geqq$ irányú egyenlőtlenség. Ezt átalakítjuk egyenletté úgy, hogy bevezetjük a v_4 változót. A v_i változónál az i index helyére célszerű azt a számot írni, ahányadik feltételnek az eltérésváltozója. Feladatunk a következő alakú lesz:

$$\begin{aligned}
x_1+2x_2 \quad\quad +x_4+x_5 \quad\quad &\leqq 110,\\
x_1 \quad\quad +2x_3+x_4+x_5 \quad\quad &= 80,\\
3x_2+\ x_3+x_4+x_5 \quad\quad &= 70,\\
2x_2 \quad\quad\quad +x_5 -v_4 &= 40,\\
x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5 \geqq 0,\ v_4 &\geqq 0,\\
z = (x_1+2x_2+3x_3+2x_4+3x_5) &\to \max.
\end{aligned}$$

Mivel a feladatot módosított normál feladattá alakítottuk, azért induló táblázata:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	v_4	
u_1	1	2	0	1	1	0	110
$^*u_2$	1	0	2	1	1	0	80
$^*u_3$	0	3	1	$\boxed{1}$	1	0	70
$^*u_4$	0	2	0	0	1	—1	40
	1	2	3	2	3	0	0
	1	5	3	2	3	—1	190

A v_i eltérésváltozók a táblázatban ugyanolyan szerepet játszanak, mint a primál változók. A táblázatban látható első szaggatott vonal azt jelzi, hogy az alatta levő feltételeknek kell egyenlőség formájában teljesülniük, és így a másodlagos célfüggvény együtthatóit ezen vonal alatt elhelyezkedő számok oszloponkénti összegezéséből nyerjük. A programozást a másodlagos célfüggvény szerint végezzük. A következő táblázatok részletesen mutatják a programozás menetét:

	x_1	x_2	x_3	x_5	v_4	
u_1	1	—1	—1	0	0	40
$*u_2$	1	—3	1	0	0	10
x_4	0	3	1	1	0	70
$*u_4$	0	2	0	$\boxed{1}$	—1	40
	1	—4	1	1	0	—140
	1	—1	1	1	—1	50

	x_1	x_2	x_3	v_4	
u_1	1	—1	—1	0	40
$*u_2$	$\boxed{1}$	—3	1	0	10
x_4	0	1	1	1	30
x_5	0	2	0	—1	40
	1	—6	1	1	—180
	1	—3	1	0	10

	x_2	x_3	v_4	
u_1	2	—2	0	30
x_1	—3	1	0	10
x_4	1	1	$\boxed{1}$	30
x_5	2	0	—1	40
	—3	0	1	—190
	0	0	0	0

Mivel minden csillaggal megjelölt duális változó kikerült a bázisból, és így a másodlagos célfüggvénynek megfelelő sor minden eleme zérus, azért ez a táblázat már egy megvalósítható megoldást mutat. Az is látható, hogy a célfüggvény sorában van pozitív szám, ezért ez a táblázat még javítható. A harmadik oszlop harmadik elemét kell generáló elemnek választani. Ekkor a v_4 helyet cserél az x_4-gyel. (Most már egyetlen oszlopot sem hagyunk el a a következő táblázatnál.)

	x_2	x_3	x_4	
u_1	2	—2	0	30
x_1	—3	1	0	10
v_4	1	1	1	30
x_5	3	1	1	70
	—4	—1	—1	—220

Az utolsó sorban csak negatív elemek vannak, így ez a táblázat már az optimális megoldást adja. A $v_4 = 30$ azt jelenti, hogy a negyedik feltétel bal oldala 30 egységgel nagyobb, mint a jobb oldala. Az optimális megoldás:

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 70 \end{bmatrix}, \qquad z_0 = 220.$$

Feladatok

195. Oldja meg az alábbi feladatokat!

a)
$$\begin{aligned} x_1+x_2+2x_3 &\leqq 5, \\ 2x_1+x_2+\ x_3 &\geqq 2, \\ x_1,\ x_2,\ x_3 &\geqq 0, \\ (x_1+x_2+3x_3) &\to \max; \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} x_1+3x_2+2x_3 &\geqq 12, \\ x_1+2x_2+\ x_3 &= 10, \\ x_1,\ x_2,\ x_3 &\geqq 0, \\ (2x_1+3x_2+4x_3) &\to \max; \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} x_1+\ x_2+2x_3 &\geqq 4, \\ x_1+2x_2+\ x_3 &= 7, \\ x_1,\ x_2,\ x_3 &\geqq 0, \\ (3x_1+10x_2+4x_3) &\to \min; \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} x_1\ \ +x_3 &\geqq 10, \\ x_2+x_3 &\leqq 8, \\ x_1,\ x_2,\ x_3 &\geqq 0, \\ (x_1+3x_2-x_3) &\to \min. \end{aligned}$$

196. Határozza meg az alábbi általános alakú feladatok optimális megoldásait és az optimális megoldásokhoz tartozó célfüggvényértéket!

a)
$$\begin{aligned}
x_1 \qquad +x_3 \qquad &= 6,\\
x_2+x_3+\ x_4 &= 7,\\
x_1+x_2+x_3+2x_4 &\geqq 9,\\
x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \qquad &\geqq 0,\\
(4x_1+5x_2+4x_3+5x_4) &\to \max;
\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned}
x_1 \qquad +x_3+2x_4 &\leqq\ 6,\\
x_2-x_3+\ x_4 &\geqq\ 6,\\
x_1+2x_2+x_3+\ x_4 &= 12,\\
x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \qquad &\geqq\ 0,\\
(7x_1+x_2+\frac{46}{3}x_3+x_4) &\to \max;
\end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned}
x_1+x_2 \qquad +\ x_4 &\geqq 6,\\
x_1 \qquad +\ x_3+\ x_4 &\leqq 8,\\
x_1+x_2+2x_3+2x_4 &= 8,\\
x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \qquad &\geqq 0,\\
(3x_1+4x_2+8x_3+8x_4) &\to \max;
\end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned}
2x_1+\ x_2+\ x_3+2x_4 &\geqq\ 8,\\
2x_1+\ x_2+3x_3 \qquad &\geqq\ 7,\\
6x_1+2x_2+5x_3+\ x_4 &= 19,\\
x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \qquad &\geqq\ 0,\\
(8x_1+4x_2+5x_3+7x_4) &\to \max.
\end{aligned}$$

197. Írja fel az alábbi feladatok induló szimplex táblázatát, valamint az optimális megoldást adó táblázatot a szokásos formában!

a)
$$\begin{aligned}
3x_1 \qquad +2x_3+x_4 &\leqq 12,\\
x_1+x_2+\ x_3 \qquad &\geqq\ 4,\\
x_2+3x_3\ .\ x_4 &=\ 7, \qquad + x_4\\
x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \qquad &\geqq\ 0,\\
(3x_1-5x_2+4x_3-6x_4) &\to \min;
\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned}
2x_1+x_2 \qquad +x_4+\ x_5 &\geqq 16,\\
x_1 \qquad +\ x_3+x_4+\ x_5 &= 12,\\
x_1+x_2+3x_3 \qquad +2x_5 &= 18,\\
x_1,\ x_2,\ x_2,\ x_4,\ x_5 \qquad &\geqq\ 0,\\
(2x_1+5x_2+x_3+7x_4+3x_5) &\to \max;
\end{aligned}$$

c)
$$\begin{array}{l}
x_1 - x_2 + 2x_3 \leqq 10,\\
x_2 + x_3 + x_4 \geqq 4,\\
x_1 + x_3 + x_4 \geqq 7,\\
x_1 + x_2 + 2x_4 \leqq 12,\\
x_1, x_2, x_3, x_4 \geqq 0,\\
(3x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 6x_4) \to \min;
\end{array}$$

d)
$$\begin{array}{l}
3x_1 + x_3 + x_4 + x_5 \geqq 3,\\
2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 8,\\
x_1 + x_3 + 3x_4 \leqq 8,\\
x_1 + x_2 + 2x_4 + x_5 \geqq 4,\\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geqq 0,\\
(4x_1 + 7x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 6x_5) \to \max.
\end{array}$$

198. Írja fel az alábbi általános alakú feladatok duálisát úgy, hogy az egyenlőségi feltételeknek megfelelő eltérésváltozók előjelkötetlenek legyenek! Határozza meg az optimális megoldást adó táblázatokat, és ezek alapján írja fel mind a primál, mind a duál feladatok optimális megoldásait!

a)
$$\begin{array}{l}
2x_1 + x_2 \geqq 8,\\
x_1 + x_3 \leqq 10,\\
x_1 + x_2 + x_3 = 12,\\
x_1, x_2, x_3 \geqq 0,\\
z = (3x_1 + 5x_2 + 7x_3) \to \max;
\end{array}$$

$-2x_1 - x_2 \leqq -8$
$x_1 + x_3 \leqq 10$
$x_1 + x_2 + x_3 = 12$

l. 443 old.
$u_1, u_2 \geqq 0$

$-2u_1 + u_2 + u_3 \geqq 3$
$-u_1 + u_3 \geqq 5$
$+ u_2 + u_3 \geqq 7$

$w = -8u_1 + 10u_2 + 12u_3 \to \min$

b)
$$\begin{array}{l}
x_1 + x_3 + x_4 \geqq 6,\\
x_2 + x_4 \geqq 4,\\
2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leqq 9,\\
x_1, x_2, x_3, x_4 \geqq 0,\\
(4x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 3x_4) \to \max;
\end{array}$$

c)
$$\begin{array}{l}
x_2 - x_3 + x_4 = 2,\\
2x_1 + x_2 + 2x_3 \leqq 14,\\
x_1 + x_3 + x_4 \geqq 5,\\
x_1 + x_2 + x_4 \leqq 9,\\
x_1, x_2, x_3, x_4 \geqq 0,\\
(3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 6x_4) \to \min;
\end{array}$$

d)
$$\begin{array}{l}
x_1 - x_2 + x_4 + 2x_5 \geqq 5,\\
x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 \leqq 14,\\
-x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 \geqq -6,\\
x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + 3x_5 = -4,\\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geqq 0,\\
(2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + 4x_5) \to \min.
\end{array}$$

239. Tekintsük a következő — a **238.** feladat bizonyos fokú általánosításának tekinthető — feladatot!

$$\begin{aligned}
a^n x_1 + a^{n+1} x_2 + a^{n+2} x_3 + \ldots + a^{n+k-1} x_k &\leqq b, \\
a^{n+1} x_1 + a^{n+2} x_2 + a^{n+3} x_3 + \ldots + a^{n+k} x_k &= b^2, \\
a^{n+2} x_1 + a^{n+3} x_2 + a^{n+4} x_3 + \ldots + a^{n+k+1} x_k &\geqq b^3, \\
x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k &\geqq 0, \\
(x + 2x_2 + 3x_3 \ldots + kx_k) &\to \max;
\end{aligned}$$

ahol a, b, $n > 0$ és k ötnél nagyobb egész szám.

Ezzel a feladattal kapcsolatban is válaszoljon a **238.** feladatban feltett *a), b), c), e), h)* kérdésekre! A *d)* kérdés pedig úgy módosul, hogy mi lesz a feladat optimális megoldása, ha az a paraméter végigfut a pozitív valós számok halmazán, továbbá $a = b$? Vagyis meg kell határozni azokat az intervallumokat, amelyeknek bármelyik értékét veszi is fel az a paraméter, az optimális program struktúrája nem változik.

240. Tekintsük az

$$\begin{aligned}
\mathbf{Ax} &\leqq \mathbf{b}, \\
\mathbf{x} &\geqq \mathbf{0}, \\
\mathbf{c}^*\mathbf{x} &\to \max
\end{aligned}$$

általános alakú feladatot! Változik-e az optimális megoldások halmaza, ha a feladat minden feltételi egyenlőtlenségének mindkét oldalát megszorozzuk egy pozitív skalárral? Hogyan változnak a duál feladat optimális megoldásai?

241. Jelölje B azon $\mathbf{b}$ vektorok halmazát, amelyek esetében az

$$\begin{aligned}
\mathbf{Ax} &\leqq \mathbf{b}, \\
\mathbf{x} &\geqq \mathbf{0}, \\
\mathbf{c}^*\mathbf{x} &\to \max
\end{aligned}$$

feladatnak van optimális megoldása! Bizonyítsuk be, hogy a B halmaz konvex!

242. Bizonyítsuk be, hogy az optimális célfüggvényérték a kapacitásvektor konkáv függvénye!

243. Bizonyítsuk be, hogy ha az

$$\begin{aligned}
\mathbf{Ax} &\leqq \mathbf{b}, \\
\mathbf{x} &\geqq \mathbf{0}, \\
\mathbf{c}^*\mathbf{x} &\to \max
\end{aligned}$$

feladatnak bármely $\mathbf{c}$ esetén van optimális megoldása, akkor van olyan $\mathbf{y} \geqq \mathbf{0}$ vektor, melyre igaz, hogy $\mathbf{y}^*\mathbf{A} > \mathbf{0}^*$!

Mikor L a végtelenbe, miközben egy a végtelenben lévő irányban van optimum!

244. Határozza meg, hogy az alábbi állítások közül melyik igaz és melyik hamis! (Válaszát indokolja!)

i *a)* Ha egy normál feladat L halmaza korlátos, akkor duálisának van optimális megoldása. (ez tétel) dualitás

h *b)* Egy normál feladat minden lehetséges megoldása mindig előállítható az L halmaz csúcspontjainak konvex lineáris kombinációjaként. (Lehet L nem korlátos is

i *c)* Egy normál feladat duálisának akkor is lehet optimális megoldása, ha a normál feladat L halmaza nem korlátos. *Vigyázni! L nem korlátos, nem a cél!

i *d)* A normál feladatnak mindig van optimális megoldása, ha az $\mathbf{Ax} \leqq \mathbf{b}$ egyenlőtlenségben szereplő $\mathbf{A}$ mátrix (együttható mátrix) minden eleme nagyobb nullánál. Σ akkor nem korlátos L-nél, ha $c_j > 0$ [illegible] nincs pozitív elem

h *e)* Ha egy normál feladat optimális megoldása nem degenerált, akkor biztosan van olyan feltétel, amely az optimális programban egyenlőségként teljesül. nem igaz, [illegible]

h *f)* Ha egy normál feladat optimális célfüggvényértéke 30, akkor a megfelelő duál feladatnak létezhet olyan megoldása, amelynél a duál feladat célfüggvényértéke 20.

h *g)* Ha egy normál feladatnak csak egy optimális megoldása van, akkor duálisának is csak egy optimuma van. persze igen lehet

i *h)* Ha a normál feladatnak is és a duálisának is van lehetséges megoldása, akkor mindkettőnek van optimális megoldása is. * hogy a duálisnak is van lehetséges megoldása, köv., hogy a primál L-je korlátos [illegible]

h *i)* Ha egy lineáris programozási feladatnak végtelen sok optimális megoldása van, akkor van legalább két optimális bázismegoldása is.

i *j)* Létezik olyan általános alakú feladat, amelynek van lehetséges megoldása, de nincs optimális megoldása. Nem korlátos az L

h *k)* Egy lineáris programozási feladat optimális megoldásai mindig valódi részhalmazát alkotják a lehetséges megoldások halmazának. lehet, hogy minden is opt. [illegible]

h *l)* Az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$,

$$\mathbf{x} \geqq \mathbf{0},$$
$$\mathbf{c^*x} \to \max$$

az egyenletrendszer lehet ellentmondó

feladatnak mindig van lehetséges megoldása, ha $\mathbf{b} > \mathbf{0}$ és $\mathbf{A}$ nemszinguláris mátrix.

i *m)* Az $\mathbf{Ax} \leqq \mathbf{b}$,

kihagyható

$$\mathbf{x} \geqq \mathbf{0},$$
$$\mathbf{c^*x} \to \max$$

feladat lehetséges megoldásainak halmaza mindig korlátos, ha $\mathbf{A} > \mathbf{0}$ és $\mathbf{0} < \mathbf{b} < 999 \cdot \mathbf{1}$.

h *n)* Ha az $\mathbf{Ax} \leqq \mathbf{b}$,

$$\mathbf{x} \geqq \mathbf{0},$$
$$\mathbf{c^*x} \to \max$$

általános alakú feladatnak az $\mathbf{x}_0$ optimális megoldása, akkor az $\mathbf{x}_0$ optimális megoldása az $\mathbf{Ax} \leqq \mathbf{b}$,

$$\mathbf{x} \geqq \mathbf{0},$$
$$\lambda\mathbf{c^*x} \to \max$$

λ lehet negatív is! megoldhatatlan [illegible]

feladatnak is (ahol λ valós szám).

i *o)* Van olyan lineáris programozási feladat, amelynek az $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ vektor nem lehetséges megoldása.

* Tétel: Ha a primál feladat célfüggvénye nem korlátos az L halmazon, akkor a duál feladatnak nincs lehetséges megoldása. ($z \leq w$) Nem megoldható

11. A duál szimplex módszer

Duál szimplex módszernek nevezzük azt a megoldó algoritmust, melynél a feladat optimális megoldásához a duál feladat megvalósítható megoldásainak egy sorozatán keresztül jutunk. Vannak olyan speciális alakú lineáris programozási feladatok, melyek megoldása duál szimplex módszerrel célszerűbb, mint a primál szimplex eljárással. Ilyen az

$$\begin{aligned} \mathbf{Ax} &\leqq \mathbf{b}, \\ \mathbf{x} &\geqq \mathbf{0}, \\ \mathbf{c} &\leqq \mathbf{0}, \\ \mathbf{c}^*\mathbf{x} &\to \max \end{aligned}$$

feladat is. A $\mathbf{c}$ vektor elemei nem lehetnek pozitívak, míg a $\mathbf{b}$ vektor komponenseinek előjele tetszőleges. Ehhez a feladathoz az

	$\mathbf{x}^*$	
$\mathbf{u}$	$\mathbf{A}$	$\mathbf{b}$
$-z$	$\mathbf{c}^*$	0

induló táblázatot rendeljük, mely a $\mathbf{c} \leqq \mathbf{0}$ feltétel miatt a duál feladat egy megvalósítható megoldását adja. Ha történetesen a $\mathbf{b}$ vektornak nincs negatív eleme, akkor a táblázat egyben a primál feladat egy lehetséges megoldását is mutatja, vagyis táblázatunk optimális.

Ha azonban a $\mathbf{b}$ vektornak van negatív eleme — vagyis a táblázat nem optimális —, akkor a programozást tovább kell folytatni. *Úgy kell a generáló elemeket választani, hogy minden egyes elemi bázistranszformáció elvégzése után kapott táblázat a duál feladat egy megvalósítható megoldását adja és a célfüggvény értéke csökkenjen.* Vagyis továbbra is *fenn kell állnia az utolsó sorra nézve a nempozitivitási feltételnek, míg az utolsó oszlopból igyekszünk a negatív elemeket eltüntetni.* Az alábbiakban azt nézzük meg, hogyan kell a generáló elemeket megválasztani ahhoz, hogy a duál feladat megvalósítható megoldásain keresztül jussunk el mind a primál, mind a duál feladat optimális megoldását mutató táblázathoz. E végett tegyük fel, hogy bizonyos számú elemi bázistranszformáció elvégzése után az

		… y_k …		
y_1		a'_{1k}		b'_1
y_2		a'_{2k}		b'_2
·		·		·
·		·		·
·		·		·
y_i	$a'_{i1}\ a'_{i2}$ …	a'_{ik}	… a'_{in}	b'_i
·		·		·
·		·		·
·		·		·
y_m		a'_{mk}		b'_m
$-z$	$c'_1\ c'_2$ …	c'_k	… c'_n	$-z'$

táblázathoz jutottunk, ahol a $c'_1, c'_2, \ldots, c'_k, \ldots, c'_n$ nempozitív valós számok. *Generáló elemet olyan sorban kell választani, amelynek utolsó eleme* (a kapacitásvektor megfelelő eleme) *negatív*. Ezért tegyük fel, hogy $b'_i < 0$. Azt akarjuk elérni, hogy az elemi bázistranszformáció elvégzése után a b'_i-nek megfelelő helyen pozitív szám álljon. Ez csak úgy lehetséges, ha generáló elemnek a sor valamelyik negatív elemét választjuk. Ezután kimondhatjuk, hogy *a duál szimplex módszernél generáló elemnek csak negatív számot választhatunk.* Arra is vigyáznunk kell, hogy az új táblázat is lehetséges megoldását adja a duál feladatnak, vagyis az utolsó sorában ne legyen pozitív elem. Ezt a szűkkeresztmetszettel tudjuk biztosítani. Mégpedig a b'_i sor minden negatív a'_{ij} elemére nézve képezzük a

$$\frac{c'_j}{a'_{ij}}$$

hányadost, amely az adott feltételek mellett nem lehet negatív. *A legkisebb hányadost adó a'_{ij} elemet választjuk generáló elemnek.* Vagyis a'_{ik} csak akkor lehet generáló elem, ha

$$\min_{a'_{ij} < 0} \frac{c'_j}{a'_{ij}} = \frac{c'_k}{a'_{ik}}.$$

Az ily módon választott a'_{ik} generáló elem által meghatározott elemi bázistranszformáció elvégzése után a következő táblázatot kapjuk:

				y_i			
				$-\gamma a'_{1k}$			$b'_1-\gamma a'_{1k}b'_i$
				$-\gamma a'_{2k}$			$b'_2-\gamma a'_{2k}b'_i$
$\vdots$				$\vdots$			
y_k	$\gamma a'_{i1}$	$\gamma a'_{i2}$	$\dots$	γ	$\dots$	$\gamma a'_{in}$	$\gamma b'_i$
$\vdots$							$\vdots$
				$-\gamma a'_{mk}$			$b'_m-\gamma a'_{mk}b'_i$
$-z$	$c'_1-\gamma a'_{i1}c'_k$	$c'_2-\gamma a'_{i2}c'_k$	$\dots$	$-\gamma c'_k$	$\dots$	$c'_n-\gamma a'_{in}c'_k$	$-z'-\gamma c'_k b'_i$

ahol $\gamma = \dfrac{1}{a'_{ik}}$. Egyszerűen belátható, hogy a táblázat utolsó sorában nincs pozitív elem. Tehát ez a táblázat is a duál feladat egy megvalósítható megoldását adja. Mivel

$$z' \geqq z' + \gamma c'_k b'_i,$$

azért ehhez a megoldáshoz tartozó célfüggvényérték kisebb (degeneráció esetét kivéve), mint az előző megoldásnál. Így közelebb jutottunk az optimumhoz.

Ha az új táblázat még nem ad megvalósítható megoldást a primál feladatra nézve is, akkor az előbbi eljárást megismételjük. *Az optimális megoldást adó táblázathoz* — amenynyiben ilyen létezik — *véges számú lépésben jutunk el. Ha egy olyan táblázatot kapunk az elemi bázistranszformációk elvégzése során, amelynek utolsó oszlopában van negatív elem, de a neki megfelelő sorban nincs negatív elem, akkor a primál feladatnak nincs lehetséges megoldása, és a duál feladat célfüggvénye nem korlátos.*

Duál szimplex módszerrel csak olyan feladatokat célszerű megoldani, melyek átalakíthatók oly módon, hogy célsorukban csak nempozitív számok vannak, és az adott feltételek mellett keressük a célfüggvény maximumát. Ha az ilyen feladat módosított normál vagy általános alakú, akkor először a $\geqq$ irányú egyenlőtlenségeket —1-gyel való szorzással ellenkező irányúra változtatjuk, aztán az egyenlőségi feltételeket úgy alakítjuk át, hogy azok jobb oldalán álló konstans számok ne legyenek pozitívak. (Ez is —1-gyel való szorzással érhető el.) Az ily módon felírt feladat induló szimplex táblázatát a szokásos módon készítjük el. A generáló elemeket először az egyenlőségi feltételeknek megfelelő sorokban választjuk (a generáló elemet tartalmazó oszlop itt is elmaradhat). Ha az egyenlőségi feltételekhez tartozó csillagos változók eltűntek a bázisból, akkor a programozást az ismertetett módszerrel addig folytatjuk, amíg vagy az optimális megoldást adó táblázathoz jutunk, vagy olyan táblázatot kapunk, amely azt mutatja, hogy a primál feladatnak nincs lehetséges megoldása, vagy esetleg van lehetséges megoldása, de nincs optimális megoldása. (Több egyenlőségi feltétel esetén az is előfordulhat, hogy az elemi bázistranszformációk során olyan táblázathoz jutunk, amelynél az egyenlőségi feltételnek megfelelő sor — a csillagos változó sora — kapacitáseleme pozitív. Ilyenkor az egész sor minden elemét —1-gyel beszorozhatjuk, és így a feladat megoldását a duál szimplex módszerrel tovább folytathatjuk.)

Oldjuk meg az ismertetett módszerrel a következő numerikus feladatot:

$$\begin{aligned}
-2x_1+x_2-x_3+x_4+6x_5 &\leqq 8,\\
-x_1 \quad -2x_3+x_4+2x_5 &\geqq 20,\\
x_2-x_3+x_4-x_5 &\geqq 14,\\
x_1+x_2-x_3-x_4 \quad &= 12,\\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \quad &\geqq 0,\\
(-4x_1-5x_2-x_3-7x_4-3x_5) &\to \max!
\end{aligned}$$

Először is alakítsuk át (—1-gyel való szorzással) az alábbi formára:

$$\begin{aligned}
-2x_1+x_2-x_3+x_4+6x_5 &\leqq 8,\\
x_1 \quad +2x_3-x_4-2x_5 &\leqq -20,\\
-x_2+x_3-x_4+x_5 &\leqq -14,\\
-x_1-x_2+x_3+x_4 \quad &= -12,\\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \quad &\geqq 0,\\
(-4x_1-5x_2-x_3-7x_4-3x_5) &\to \max!
\end{aligned}$$

A feladat induló szimplex táblázata:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
u_1	—2	1	—1	1	6	8
u_2	1	0	2	—1	—2	—20
u_3	0	—1	1	—1	1	—14
$^*u_4$	$\boxed{-1}$	—1	1	1	0	—12
	—4	—5	—1	—7	—3	0

Elsőre a csillagos változónak megfelelő — a negyedik — sorban választunk generáló elemet. A legkisebb keresztmetszet a táblázatban látható —1-nél adódik. Ezt választva generáló elemnek, a bázisváltozók közül eltűnik a $^*u_4$ és helyére az x_1 kerül. A bázistranszformáció elvégzése után táblázatunk a következőképpen alakul:

	$^*u_4$	x_2	x_3	x_4	x_5	
u_1		3	—3	—1	6	32
u_2		$\boxed{-1}$	3	0	—2	—32
u_3		—1	1	—1	1	—14
x_1		1	—1	—1	0	12
	(—4)	—1	—5	—11	—3	48

Ez a táblázat a duál feladat egy lehetséges megoldását adja, mivel az utolsó sorában nincs pozitív elem. (Az $*u_4$ változó előjelkötetlen, azért annak célfüggvénybeli értékétől eltekintünk.) Most a második sorban választunk generáló elemet (de választhatnánk a harmadik sorban is). A legkisebb keresztmetszet a táblázatban bekeretezett számnál adódik. Vagyis a következő lépésben helyet cserél az x_2 és az u_2. Ezt mutatja a következő táblázat.

	$*u_4$	u_2	x_3	x_4	x_5	
u_1		3	6	$\boxed{-1}$	0	−64
x_2		−1	−3	0	2	32
u_3		−1	−2	−1	3	18
x_1		1	2	−1	−2	−20
	(−5)	−1	−8	−11	−1	80

Mivel az utolsó oszlopban még van negatív szám, azért nem olvasható ki megvalósítható megoldás a primál feladatra vonatkozóan, és így eljárásunkat tovább kell folytatni. Az első sorban — a legkisebb keresztmetszetet figyelembe véve — a bekeretezett számot kell generáló elemnek választani. A bázistranszformáció elvégzése után a következő táblázatot kapjuk:

	$*u_4$	u_2	x_3	u_1	x_5	
x_4		−3	−6	−1	0	64
x_2		−1	−3	0	2	32
u_3		−4	−8	−1	3	82
x_1		−2	−4	−1	−2	44
	(−16)	−34	−74	−11	−1	784

Látható, hogy az utolsó oszlopban nincs negatív elem. Ebből következik, hogy a primál feladat egy megvalósítható megoldásához jutottunk, és így mind a primál, mind a duál feladatra nézve ez a táblázat optimális megoldást ad. A primál feladat optimális megoldása: $\mathbf{x}_0^* = [44;\ 32;\ 0;\ 64;\ 0]$, $z_0 = -784$. A duál feladat optimális megoldása: $\mathbf{u}_0^* = [11;\ 34;\ 0;\ 16]$, $w_0 = -784$.

Az alábbi feladatot is oldjuk meg duál szimplex módszerrel!

$$
\begin{aligned}
-x_1-2x_2+2x_3+\ x_4 &\leqq 5,\\
x_1-3x_2+3x_3+4x_4 &= 9,\\
-x_1-4x_2+2x_3+\ x_4 &\geqq 6,\\
x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \qquad &\geqq 0,\\
(x_1+3x_2+x_3+7x_4) &\to \min.
\end{aligned}
$$

A megoldás egyes lépéseit az alábbi táblázatok mutatják.

	x_1	x_2	x_3	x_4	
u_1	-1	-2	2	1	5
$*u_2$	-1	3	$\boxed{-3}$	-4	-9
u_3	1	4	-2	-1	-6
	-1	-3	-1	-7	0

	x_1	x_2	x_4	
u_1	$\boxed{-\frac{5}{3}}$	0	$-\frac{5}{3}$	-1
x_3	$\frac{1}{3}$	-1	$\frac{4}{3}$	3
u_3	$\frac{5}{3}$	2	$\frac{5}{3}$	0
	$-\frac{2}{3}$	-4	$-\frac{17}{3}$	3

	u_1	x_2	x_4	
x_1	$-\frac{3}{5}$	0	1	$\frac{3}{5}$
x_3	$\frac{1}{5}$	-1	1	$\frac{14}{5}$
u_3	1	2	0	-1
	$-\frac{2}{5}$	-4	-5	$\frac{17}{5}$

Az utolsó táblázat utolsó oszlopában a harmadik elem —1, de ebben a sorban nincs negatív elem. Ebből az következik, hogy a primál feladatnak nincs lehetséges megoldása és a duál feladatnak nincs optimális megoldása. Ugyanis a duál feladat:

$$
\begin{aligned}
-u_1-u_2+u_3 &\geqq -1,\\
-2u_1+3u_2+4u_3 &\geqq -3,\\
2u_1-3u_2-2u_3 &\geqq -1,\\
u_1-4u_2-u_3 &\geqq -7,\\
u_1,\ u_3 &\geqq 0\\
(5u_1-9u_2-6u_3) &\to \min.
\end{aligned}
$$

Ennek a feladatnak lehetséges megoldása minden olyan $\mathbf{u}^* = [k; 0; k]$ vektor, ahol $k > 0$. Ezekhez a lehetséges megoldásokhoz tartozó célfüggvényérték: $-k$, amely k növekedésével minden határon túl csökken. Tehát a célfüggvénynek nincs alsó korlátja, vagyis a duál feladatnak nincs optimális megoldása. Tudjuk, hogy $\mathbf{c}^*\mathbf{x} \leqq \mathbf{u}^*\mathbf{b}$ minden olyan $\mathbf{x}$-re és $\mathbf{u}$-ra, ahol $\mathbf{x}$ a primál feladatnak, $\mathbf{u}$ a duál feladatnak lehetséges megoldása. Mivel azonban az $\mathbf{u}^*\mathbf{b}$-nek (jelen esetben) nincs alsó korlátja, azért nincs olyan $\mathbf{x}$ vektor, amely a fenti egyenlőtlenséget kielégítené. Vagyis, a primál feladatnak nincs lehetséges megoldása.

Megjegyezzük, hogy néha egy feladaton belül is szokták alkalmazni mind a primál, mind a duál szimplex algoritmust. E két módszer célszerű alkalmazása lerövidítheti az adott feladat megoldásának menetét. Ezeken kívül a szimplex módszernek még különböző változatai vannak, melyek közül mi még a módosított szimplex módszerrel foglalkozunk a következő fejezetben.

Feladatok

261. Oldja meg a következő háromváltozós feladatokat duál szimplex módszerrel!

a)
$$
\begin{aligned}
-x_1+x_2-2x_3 &\geqq 10,\\
-x_2+3x_3 &\geqq 8,\\
x_1,\ x_2,\ x_3 &\geqq 0,\\
(3x_1+2x_2+6x_3) &\to \min;
\end{aligned}
$$

b)
$$
\begin{aligned}
2x_1+x_2+x_3 &= 10,\\
3x_1+x_2+2x_3 &\geqq 18,\\
x_1,\ x_2,\ x_3 &\geqq 0,\\
(8x_1+9x_3) &\to \min;
\end{aligned}
$$

c)
$$
\begin{aligned}
-3x_1+x_2-x_3 &\geqq 9,\\
x_1+2x_2-3x_3 &\leqq 6,\\
x_1,\ x_2,\ x_3 &\geqq 0,\\
(-3x_1-4x_2-5x_3) &\to \max;
\end{aligned}
$$

d)
$$
\begin{aligned}
2x_1+3x_2+x_3 &= 12,\\
x_1+2x_2+x_3 &\leqq 10,\\
x_1,\ x_2,\ x_3 &\geqq 0,\\
(5x_1+8x_2+2x_3) &\to \min.
\end{aligned}
$$

262. Határozza meg az alábbi feladatok optimális megoldásait duál szimplex módszerrel, és írja fel a duál feladatok optimális megoldásait is!

a)
$$
\begin{aligned}
x_1-x_2+6x_3+4x_4 &\leqq 10,\\
2x_1+x_2+3x_3+4x_4 &\geqq 6,\\
-x_2+2x_3+x_4 &\geqq 3,\\
x_1, x_2, x_3, x_4 &\geqq 0,\\
(x_1+3x_3+x_4) &\to \min;
\end{aligned}
$$

b)
$$
\begin{aligned}
-x_1+2x_2-3x_3+x_4 &\leqq 8,\\
x_2+2x_4-x_5 &= 9,\\
x_1+2x_3-x_4+2x_5 &\geqq 10,\\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geqq 0,\\
(4x_1+2x_2+2x_3+5x_4) &\to \min;
\end{aligned}
$$

c)
$$
\begin{aligned}
x_1+x_3+4x_4 &\geqq 8,\\
x_1+2x_2+3x_3 &\geqq 4,\\
x_1+x_3+5x_4 &\leqq 7,\\
x_2+2x_3+x_4 &\leqq 12,\\
x_1, x_2, x_3, x_4 &\geqq 0,\\
(2x_1+3x_2+x_3+5x_4) &\to \min;
\end{aligned}
$$

d)
$$
\begin{aligned}
2x_1+x_3+x_5 &\leqq 10,\\
3x_2+x_3+2x_4+x_5 &\geqq 12,\\
-x_2+3x_3+2x_5 &\geqq 8,\\
-x_1+4x_2+x_4+x_5 &\geqq 6,\\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geqq 0,\\
(2x_1+3x_2+4x_3+5x_5) &\to \min.
\end{aligned}
$$

263. Az alábbi feladatokat duál szimplex algoritmussal oldja meg! Írja fel a feladatok induló és optimális megoldást adó táblázatát! Az optimális táblázat alapján mondja meg, hogy mi az optimális megoldása a primál, illetve a duál feladatnak!

a)
$$
\begin{aligned}
-x_1+x_2+x_3 &\leqq 16,\\
x_2+x_3-x_4 &\geqq 20,\\
-x_1+x_2-x_3+x_4 &\leqq 20,\\
3x_1-4x_4 &\leqq 10,\\
x_1, x_2, x_3, x_4 &\geqq 0,\\
(7x_1+4x_2+2x_3+7x_4) &\to \min;
\end{aligned}
$$

b)
$$\begin{aligned}
x_1+x_2+x_3+x_4 &\geqq 40,\\
2x_1-x_2-3x_4 &\leqq 30,\\
x_2+2x_4 &\geqq 20,\\
x_1+2x_2+x_3+2x_4 &\leqq 50,\\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geqq 0,\\
(4x_1+5x_2+4x_3+10x_4) &\to \min;
\end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned}
x_1-2x_2+x_3-2x_4 &\leqq 18,\\
-x_2+x_3-x_4 &\geqq 20,\\
-3x_2+2x_3-x_4 &= 34,\\
-2x_1+x_3+x_4 &\leqq 30,\\
x_1, x_2, x_3, x_4 &\geqq 0,\\
(x_1+2x_2+6x_3+4x_4) &\to \min;
\end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned}
x_3+x_4 &\geqq 1100+x_1,\\
x_1+4x_2+x_4+x_5 &\geqq 2000+x_3,\\
8x_2+x_3+x_4+2x_5 &\leqq 3000+x_1,\\
3x_1+2x_2+x_3+2x_4+x_5 &\leqq 3100,\\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geqq 0,\\
(3x_1+8x_2+10x_3+5x_4+2x_5) &\to \min.
\end{aligned}$$

264. Az alábbi táblázatokat egy-egy általános alakú feladat megoldása során kaptuk. A táblázatok alapján írja fel az eredeti feladatok, valamint a duál feladatok optimális megoldását! Határozza meg az optimális megoldáshoz tartozó célfüggvényértéket, ha az eredeti feladatoknál a célfüggvény minimumának elérése volt a cél, továbbá írja fel az eredeti feladatokat a szokásos formában ($\mathbf{b} \geqq \mathbf{0}$)!

a)

	u_1	x_2	x_3	x_4	
x_1	−1	−2	0	−1	20
u_2	0	1	−1	−1	12
u_3	1	2	2	−1	−2
	−4	−10	−3	−5	80

b)

	x_1	x_2	u_2	x_4	x_5	
u_1	1	−1	1	0	2	−20
x_3	0	1	−1	1	−1	70
u_3	−3	−1	0	1	0	30
	−2	−1	−2	0	−3	140

c)

	x_1	x_2	u_1	x_4	
x_3	−2	1	−1	0	10
u_2	1	−1	2	−1	−8
u_3	8	−1	2	−3	20
u_4	6	1	1	2	−7
	−20	−3	−6	−5	60

d)

	x_1	x_2	x_3	x_4	$*u_1$	
x_5	1	0	−1	2	−1	7
u_2	−1	1	3	−1	1	6
u_3	0	2	−1	2	−1	4
u_4	1	1	−2	1	−1	−4
	−9	−6	−9	−1	−1	7

265. Egy általános alakú feladat megoldása során az alábbi táblázatig jutottunk:

	x_1	x_2	x_3	x_4	$*u_1$	
x_5	−1	1	0	−1	−1	10
u_2	0	−1	−1	0	−1	−2
u_3	−2	2	−2	−3	−3	30
u_4	5	−4	1	−3	0	−3
	−5	−1	−1	−9	−2	20

a) Határozza meg a primál feladat optimális bázismegoldásait és a hozzájuk tartozó célfüggvényértéket!

b) Határozza meg a duál feladat optimális megoldását!

c) Optimális megoldása-e az $\mathbf{x}^* = \left[0; \frac{1}{6}; \frac{5}{6}; 0; \frac{59}{6}\right]$ vektor a primál feladatnak?

d) Mi lenne az eredeti feladat optimális megoldása, ha a negyedik feltételnek is szigorú egyenlőség formájában kellene teljesülnie?

e) Van-e olyan lehetséges megoldása a primál feladatnak, amelynél minden feltétel egyenlőség formájában teljesül?

f) Írja fel az eredeti (primál) feladatot a szokásos formában ($\mathbf{b} \geqq \mathbf{0}$), ha a célfüggvény minimumának elérése a cél!

266. Tekintsük a következő táblázatot, melyet egy feladat megoldása során kaptunk:

	x_1	$^*u_2$	x_3	x_4	x_5	
$^*u_1$	—1	0	—1	—2	1	—11
x_2	0	—1	1	1	1	16
u_3	—1	—2	1	3	—1	15
u_4	0	0	1	1	2	10
	—3	—1	—1	—2	—3	16

a) Határozza meg az eredeti feladat optimális bázismegoldásait és az optimális célfüggvényértéket!

b) Optimális megoldása-e a feladatnak az $\mathbf{x}^* = [0;\ 8;\ 5;\ 3;\ 0]$ vektor?

c) Írja fel az eredeti feladatot a szokásos formában, ha a célfüggvény minimumának elérése a cél!

d) Az $\mathbf{x}_1^* = [0;\ 7;\ 4;\ 4;\ 2]$ és az $\mathbf{x}_2^* = [1;\ 6;\ 10;\ 0;\ 0]$ vektorok lehetséges megoldásai-e az eredeti feladatnak?

e) Léteznek-e olyan p, q, r, s pozitív számok, hogy az $\mathbf{x}^* = [0;\ p;\ q;\ r;\ s]$ vektor optimális megoldása a feladatnak?

f) Mondjon olyan lehetséges megoldást, amelynél az eredeti feladat első három feltétele egyenlőség formájában teljesül!

267. Egy általános alakú (minimumfeladat) megoldása során a következő táblázathoz jutottunk:

	x_1	u_2	x_3	x_4	
u_1	—1	—2	3	2	4
x_2	0	—1	1	1	3
u_3	—1	0	—1	1	—2
u_4	—2	0	0	1	—4
	—4	—2	—6	—4	6

a) Írja fel az eredeti feladatot!

b) Optimális megoldása-e a duál feladatnak az $\mathbf{u}^* = [p;\ q;\ r;\ s]$ pozitív vektor?

c) Megadható-e úgy a $\mathbf{b}$ vektor, hogy az optimális megoldásnál minden feltétel egyenlőség formájában teljesüljön?

d) Van-e a duál feladatnak olyan lehetséges megoldása, amelynél az $\mathbf{u}$ vektornak mind a négy eleme pozitív?

e) Milyen k és l érték esetén lesz a $\mathbf{u}^* = [0;\ k;\ k;\ l]$ vektor a duál feladat optimális megoldása?