Pázmány Péter Katolikus Egyetem
Bölcsészettudományi Kar
Szociológia Intézet

Gazdaságmatematika

Füstös László

Gáspár László
Temesi József

Lineáris programozási gyakorlatok

Tankönyvkiadó, Budapest, 1987

EGYETEMI SEGÉDKÖNYV

Kiadását a művelődési miniszter rendelte el

Bírálták:

BIKICS ISTVÁNNÉ DR.
egyetemi docens

DR. SZIDAROVSZKY FERENC
egyetemi docens, a matematikai tudományok kandidátusa

ISBN 963 17 8748 6

Tartalomjegyzék

1. Egyenlőtlenség-rendszerek grafikus megoldása

A kétismeretlenes lineáris egyenletek

$$ax_1+bx_2 = c \tag{1.1}$$

alakban írhatók fel, ahol a, b, c megadott valós számokat jelentenek. Az ilyen egyenleteknek *végtelen sok megoldásuk van.* Egy-egy megoldás kételemű vektorként kezelhető. Ezek a kételemű vektorok a síkbeli Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszerben ábrázolhatók, mindegyiknek egy síkbeli pont feleltethető meg. A kétismeretlenes lineáris egyenletek megoldásai egy olyan síkbeli pontrendszert alkotnak, amely — amint azt középiskolai tanulmányainkból is tudjuk — egy egyenest határoz meg. Az egyenes a síkot két részre, ún. két félsíkra osztja. *Míg az egyenesen levő pontok* — mint kételemű vektorok — *az egyenletet elégítik ki, addig az egyenes* egyik oldalán elhelyezkedő pontok, vagyis az egyik félsík pontjai az

$$ax_1+bx_2> c, \tag{1.2}$$

a másik félsík pontjai pedig az

$$ax_1+bx_2 < c \tag{1.3}$$

egyenlőtlenségnek tesznek eleget. Ez lehetőséget ad arra, hogy a kétismeretlenes lineáris egyenlőtlenségeket grafikusan megoldjuk. Ha ugyanis nem az (1.1) egyenletet, hanem pl. az (1.2) egyenlőtlenséget kell megoldani, akkor úgy járhatunk el, hogy először megoldjuk az (1.1) egyenletet, aztán a megoldáshalmaznak megfelelő egyenesen kívül valahol kiválasztunk egy tetszőleges $[x_1'; x_2']$ koordinátájú pontot, majd ezen pont koordinátáit behelyettesítve az (1.1) egyenlet bal oldalán álló kifejezésbe azt kapjuk, hogy

$$ax_1'+bx_2' > c,$$

vagy

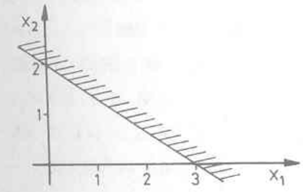
$$ax_1'+bx_2' < c.$$

Ha az első eset áll fenn, akkor azon félsík minden pontja, mely az $[x_1'; x_2']$ pontot tartalmazza az (1.2) egyenlőtlenséget kielégíti, és így az (1.2) megoldásait éppen ezen félsík pontjai adják. Amennyiben az $[x_1'; x_2']$ pont az (1.3) feltételnek tesz eleget, akkor az ezt tartalmazó félsík minden pontja ugyancsak az (1.3) egyenlőtlenséget elégíti ki. Ebből következik, hogy az (1.2) egyenlőtlenség megoldásait a másik félsík pontjai adják. Amennyiben az (1.2) és az (1.3) egyenlőtlenségeknél az egyenlőség is megengedett, vagyis az

$$ax_1+bx_2 \geqq c, \qquad ax_1+bx_2 \leqq c \tag{1.4}$$

egyenlőtlenségek valamelyikét kell megoldani, akkor ezek megoldáshalmazához az (1.1) egyenletet kielégítő egyenes pontjai is hozzátartoznak. Tehát az (1.4) egyenlőtlenségek bármelyikének a megoldáshalmazát szintén egy félsík pontjai alkotják. Míg azonban *az (1.2), (1.3) egyenlőtlenségek megoldáshalmaza egy-egy nyitott félsík, addig az (1.4) egyenlőtlenségeket egy-egy zárt félsík pontjai elégítik ki.*

Példaként bemutatjuk a $2x_1+3x_2 \geqq 6$ lineáris egyenlőtlenség megoldáshalmazának meghatározását. Először felrajzoljuk a Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszerben a $2x_1+3x_2 = 6$ egyenletnek megfelelő egyenest. Ez az *1. ábrán* látható. Vegyünk fel az egyenesen kívül egy tetszőleges pontot! Ilyen pont például az origó. Helyettesítsük be ennek koordinátáit az eredeti egyenlőtlenségbe! Azt látjuk, hogy ez a pont nem elégíti ki az egyenlőtlenséget ($2 \cdot 0+3 \cdot 0 \ngeqq 6$). Így az egyenes által meghatározott két félsík közül az, amelyik az origót tartalmazza, nem megoldása az egyenlőtlenségnek. Ebből következik, hogy a másik félsík (amelyik az origót, nem tartalmazza) adja az egyenlőtlenség megoldáshalmazát. Az *1. ábrán* satírozással jelöltük a megoldást adó félsíkot. Megjegyezzük, hogy az egyenesen kívüli pontok közül azért az origót választottuk, mert ennek mindkét koordinátája zérus, és ezeket behelyettesítve az egyenlőtlenségbe, könnyen megállapíthatjuk, hogy ez a pont kielégíti-e az egyenlőtlenséget, vagy nem. Így a megoldást adó félsík egyszerűen kijelölhető. Ha az egyenes átmegy az origón, akkor a megfelelő egyenlőtlenség megoldását adó félsík meghatározásához az origó nem használható fel. Ilyenkor egy másik, egyenesen kívüli ponttal kell vizsgálódásunkat elvégezni.



1. ábra

Ez a módszer lehetőséget ad arra, hogy kétismeretlenes lineáris egyenlőtlenség-rendszereket grafikusan oldjunk meg. Az (1.2), (1.3), illetve az (1.4) egyenlőtlenségek mindegyikének a megoldásai egy-egy félsíkot határoznak meg. Az

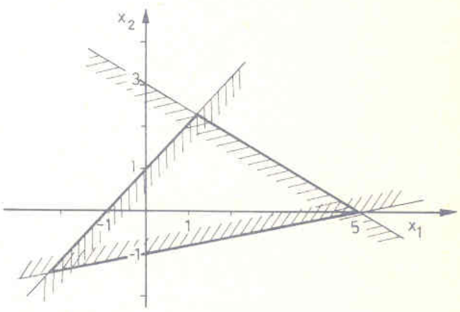
$$\begin{aligned} a_1x_1+b_1x_2 &\leqq c_1, \\ a_2x_1+b_2x_2 &\leqq c_2, \\ &\ \ \vdots \\ a_nx_1+b_nx_2 &\leqq c_n \end{aligned} \tag{1.5}$$

kétismeretlenes lineáris egyenlőtlenség-rendszer megoldásait pedig azok az $[x_1''; x_2']$ pontok adják, amelyek az (1.5) egyenlőtlenség-rendszer mindegyik egyenlőtlenségét kielégítik. Mivel minden egyes egyenlőtlenséget egy-egy félsík pontjai elégítenek ki, azért az (1.5) egyenlőtlenség-rendszer megoldásait ezen félsíkok közös része által meghatározott pontok adják. Vagyis az egyenlőtlenség-rendszert úgy oldhatjuk meg, hogy meghatározzuk az egyes egyenlőtlenségeket kielégítő félsíkokat, aztán vesszük ezek közös részét. *Ha ezeknek a félsíkoknak nincs közös része, akkor az egyenlőtlenség-rendszernek nincs megoldása, az egyenlőtlenség-rendszeren belül ellentmondás van.* Az (1.5) egyenlőtlenség-rendszer valamennyi egyenlőtlenségénél az egyenlőség is megengedett, ezért az egyes egyenlőtlenségek megoldásait zárt félsíkok adják. Minthogy zárt halmazok közös része is zárt, a megoldáshalmaz (amennyiben létezik) is zárt. Mi a továbbiakban általában olyan egyenlőtlenség-rendszerekkel foglalkozunk, ahol az egyenlőség is megengedett.

Példaként határozzuk meg a

$$\begin{aligned} 3x_1+5x_2 &\leqq 15, \\ -x_1+x_2 &\leqq 1, \\ x_1-5x_2 &\leqq 5 \end{aligned} \tag{1.6}$$

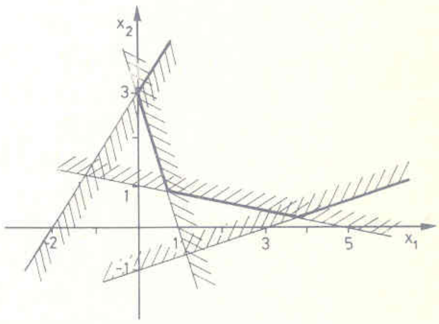
egyenlőtlenség-rendszer megoldáshalmazát! Először az egyes egyenlőtlenségek megoldásait adó félsíkokat rajzoljuk fel, aztán meghatározzuk ezek közös részét. Ez lesz az (1.6) egyenlőtlenség-rendszer megoldása. A *2. ábrán* az egyes félsíkokat satírozással jelöltük, és az egyenlőtlenség-rendszer megoldását adó zárt halmazt határoló szakaszokat megvastagítottuk. Látható, hogy a megoldáshalmaz ebben az esetben egy háromszöglap.



2. ábra

Határozzuk meg most a következő egyenlőtlenség-rendszer megoldáshalmazát!

$$\begin{aligned} x_1-3x_2 &\leqq 3, \\ 3x_1+x_2 &\geqq 3, \\ x_1+5x_2 &\geqq 5, \\ -3x_1+2x_2 &\leqq 6. \end{aligned} \tag{1.7}$$

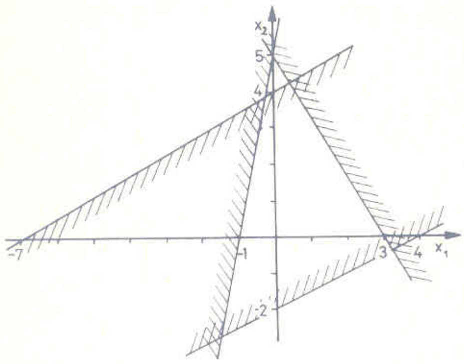


3. ábra

Az egyenlőtlenség-rendszer megoldását adó pontok halmazát az előbbiekhez hasonlóan határozzuk meg. Az (1.7) egyenlőtlenség-rendszer megoldása a *3. ábrán* látható. A megoldást adó pontok halmaza most is zárt, de nem korlátos, a halmazt egyenesszakaszok és félegyenesek határolják.

Az eddigiekhez hasonlóan vizsgáljuk meg az

$$\begin{aligned} 5x_1+3x_2 &\geqq 15, \\ x_1-2x_2 &\leqq 4, \\ -5x_1+x_2 &\geqq 5, \\ -4x_1+7x_2 &\leqq 28 \end{aligned} \tag{1.8}$$



4. ábra

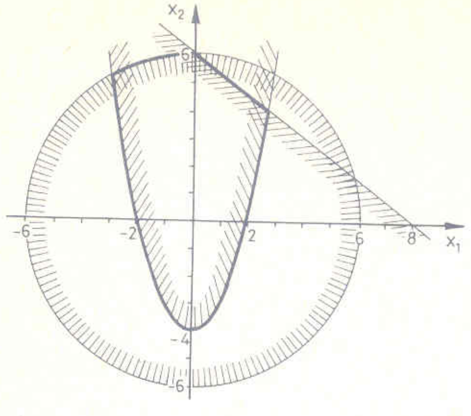
egyenlőtlenség-rendszert! Az egyes egyenlőtlenségeknek megfelelő félsíkok a *4. ábrán* láthatók. Ezeknek azonban nincs közös részük, az egyenlőtlenség-rendszernek tehát nincs megoldása. (Az (1.8) egyenlőtlenség-rendszer megoldáshalmaza az üres halmaz.)

A kétismeretlenes egyenlőtlenségek, illetve egyenlőtlenség-rendszerek közül nemcsak a lineárisak oldhatók meg grafikusan, hanem bizonyos speciális nemlineáris egyenlőtlenségek, illetve egyenlőtlenség-rendszerek is.

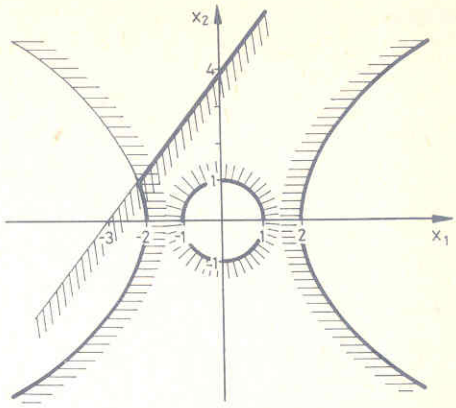
Tekintsük pl. az

$$\begin{aligned} x_1^2+x_2^2 &\leqq 36, \\ x_1^2-x_2 &\leqq 4, \\ 3x_1+4x_2 &\leqq 24 \end{aligned} \tag{1.9}$$

nemlineáris egyenlőtlenség-rendszert! Az első egyenlőtlenségnek megfelelő egyenlet egy origó középpontú 6 egység sugarú kört határoz meg. Ez a síkot két részre osztja: egy körön belüli és egy körön kívüli részre. A körvonal pontjai az $x_1^2+x_2^2=36$ egyenletnek; a körvonalon belül levő pontok az $x_1^2+x_2^2<36$ egyenlőtlenségnek; a körvonalon kívül elhelyezkedő pontok pedig az $x_1^2+x_2^2>36$ egyenlőtlenségnek tesznek eleget. Így az első egyenlőtlenséget a körvonal pontjai és a körvonalon belül elhelyezkedő pontok elégítik ki. Az első egyenlőtlenség megoldáshalmaza tehát egy zárt körlap. A második egyenlőtlenségnek megfelelő egyenlet egy parabolát határoz meg. Ez a parabolavonal is két részre osztja a síkot. Az egyik rész pontjai az $x_1^2-x_2<4$, a másik rész pontjai pedig az $x_1^2-x_2>4$ egyenlőtlenséget elégítik ki. Pl.: a (0; 5) pont eleget tesz az $x_1^2-x_2<4$ egyenlőtlenségnek. Így annak a zárt síkrésznek a pontjai adják az (1.9) egyenlőtlenség-rendszer második egyenlőtlenségének a megoldását, amelyik a (0;5) pontot tartalmazza. A harmadik egyenlőtlenség lineáris. Ennek megoldáshalmazát adó félsíkot — az előzőkben ismertetett módon — már meg tudjuk határozni. Ezek szerint az (1.9) egyenlőtlenség-rendszer megoldása az egyes egyenlőtlenségek megoldáshalmazát adó síkbeli tartományok közös része. Ezek a tartományok, valamint az (1.9) egyenlőtlenség-rendszer megoldását adó ponthalmaz az *5. ábrán* látható. Az egyenlőtlenség-rendszer megoldását adó ponthalmaz ebben az esetben zárt és korlátos.



5. ábra



6. ábra

Nézzünk meg még egy nemlineáris egyenlőtlenség-rendszert, ez legyen a következő:

$$\begin{aligned} x_1^2 - x_2^2 &\leqq 4, \\ -4x_1 + 3x_2 &\leqq 12, \\ x_1^2 + x_2^2 &\geqq 1. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Mindegyik egyenlőtlenségnek megfelelő egyenlet megoldáshalmaza egy síkbeli vonalat határoz meg. Az $x_1^2 - x_2^2 = 4$ egyenletet egy hiperbola pontjai elégítik ki, mely a síkot 3 részre osztja. A $-4x_1 + 3x_2 = 12$ egyenes, valamint az $x_1^2 + x_2^2 = 1$ kör a síkot két-két részre bontják. Az egyes egyenlőtlenségek megoldásait a sík megfelelő tartományaiban elhelyezkedő pontok adják. Az (1.10) egyenlőtlenség-rendszer megoldása ezeknek a részmegoldás-tartományoknak a közös része. A megoldáshalmazt, valamint a részmegoldáshalmazokat a *6. ábrán* a szokásos módon ábrázoltuk. Látható, hogy a megoldáshalmaz ebben az esetben elég furcsa alakzat. A zártság itt is biztosítva van (az egyenlőség megengedése miatt).

Természetesen a legkülönbözőbb síkbeli tartományok (alakzatok) alkothatják a kétváltozós egyenlőtlenségek megoldáshalmazát, attól függően hogy milyen az egyenlőtlenség-rendszer. Sajnos az esetek nagy többségében a kétismeretlenes nemlineáris egyenlőtlenségeknek megfelelő megoldáshalmazok nagyon nehezen ábrázolhatók.

A háromismeretlenes egyenlőtlenségek és egyenlőtlenség-rendszerek megoldása általában egy térbeli alakzat. Ezek ábrázolása azonban — még viszonylag egyszerű egyenlőtlenségek esetén is — nagyon nehézkes. A háromnál több ismeretlenes egyenletek és egyenlőtlenségek megoldásait adó többdimenziós ponthalmaz pedig már nem is ábrázolható. Ezért általában csak kétismeretlenes lineáris és speciálisnak mondható nemlineáris egyenlőtlenségek és egyenlőtlenség-rendszerek oldhatók meg grafikusan.

Feladatok

1. Oldja meg grafikusan a következő kétismeretlenes lineáris egyenlőtlenség-rendszereket!

a)
$$\begin{aligned} x_1+2x_2 &\geqq 2,\\ 7x_1+3x_2 &\leqq 21,\\ -3x_1+2x_2 &\leqq 6; \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 7x_1+8x_2 &\leqq 56,\\ x_1-4x_2 &\leqq 8,\\ 2x_1-x_2 &\geqq 2; \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} x_1+x_2 &\geqq 6,\\ -2x_1+x_2 &\geqq 2,\\ x_1-2x_2 &\geqq 2; \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} 5x_1+6x_2 &\leqq 30,\\ 3x_1+x_2 &\geqq 3,\\ -x_1+2x_2 &\leqq 6,\\ -2x_1+x_2 &\leqq 2,\\ 2x_1-3x_2 &\leqq 6; \end{aligned}$$

e)
$$\begin{aligned} 3x_1+5x_2 &\leqq 30,\\ x_1-2x_2 &\leqq 2,\\ -4x_1+3x_2 &\leqq 12,\\ x_1 &\geqq 0,\\ x_2 &\geqq 0; \end{aligned}$$

f)
$$\begin{aligned} x_1+2x_2 &\geqq 6,\\ -4x_1+5x_2 &\leqq 20,\\ -x_1+3x_2 &\geqq 3,\\ 0 \leqq x_1 &\leqq 4,\\ 0 \leqq x_2 &\leqq 5. \end{aligned}$$

2. Ábrázolja az alábbi kétismeretlenes, lineáris egyenlőtlenség-rendszerek megoldásait adó pontok halmazát a Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszerben!

a)
$$\begin{aligned} 2x_1+3x_2 &\geqq 6,\\ -2x_1+x_2 &\leqq 2,\\ -4x_1+5x_2 &\leqq 20,\\ x_1 &\geqq 0,\\ x_2 &\geqq 0; \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 4x_1+7x_2 &= 28,\\ 2x_1-x_2 &\leqq 6,\\ -3x_1+5x_2 &\leqq 15,\\ x_1 &\geqq 0,\\ x_2 &\geqq 0; \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} x_1+2x_2 &\geqq 2,\\ x_1-2x_2 &\leqq 6,\\ -3x_1+2x_2 &\leqq 6,\\ x_1 &\geqq 0,\\ x_2 &\geqq 0; \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} 3x_1+4x_2 &\leqq 24,\\ 5x_1+x_2 &\geqq 5,\\ x_1+2x_2 &\geqq 4,\\ -2x_1+x_2 &\geqq 6,\\ x_1 &\geqq 0,\\ x_2 &\geqq 0; \end{aligned}$$

e)
$$\begin{aligned} x_1+x_2 &\leqq 8,\\ -x_1+2x_2 &\leqq 4,\\ 5x_1-x_2 &\geqq 5,\\ 4x_1+6x_2 &\geqq 40,\\ x_1 &\geqq 0,\\ x_2 &\geqq 0; \end{aligned}$$

f)
$$\begin{aligned} 2x_1-3x_2 &= 6,\\ 4x_1+5x_2 &\geqq 20,\\ -2x_1-x_2 &\leqq 2,\\ -5x_1+2x_2 &\leqq 10,\\ x_1 &\geqq 0,\\ x_2 &\geqq 0. \end{aligned}$$

3. Ábrázolja az alábbi kétdimenziós nemlineáris egyenlőtlenség-rendszerek megoldásait adó pontok halmazát a Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszerben!

a)
$$\begin{aligned} x_1^2+x_2^2 &\leqq 16, \\ 3x_1-4x_2 &\leqq 12, \\ -3x_1-x_2 &\leqq 3; \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} (x_1-2)^2+(x_2-2)^2 &\leqq 4, \\ (x_1-4)^2+(x_2-4)^2 &\leqq 9, \\ (x_1-4)^2+(x_2-1)^2 &\leqq 9; \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} x_1^2+(x_2-2)^2 &\leqq 4, \\ x_1^2+x_2 &\leqq 3, \\ x_2 &\geqq 3; \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} x_1-x_2^2 &\leqq 3, \\ -x_1-x_2^2 &\leqq 2, \\ x_1+10x_2 &\leqq 14, \\ x_1^2-4x_2 &\leqq 16; \end{aligned}$$

e)
$$\begin{aligned} x_1^2-2x_1-x_2 &\leqq 0, \\ -2x_1+3x_2 &\leqq 6, \\ x_1+x_2 &\geqq 1, \\ x_1 &\geqq 0, \\ x_2 &\geqq 0; \end{aligned}$$

f)
$$\begin{aligned} x_1-x_2^2 &\leqq 1, \\ -x_1^2+x_2 &\leqq 1, \\ -x_1^2-x_2 &\leqq 1, \\ -x_1-x_2^2 &\leqq 1. \end{aligned}$$

4. Határozza meg grafikus úton, hogy a következő egyenlőtlenség-rendszerekben melyek a felesleges egyenlőtlenségek!

a)
$$\begin{aligned} x_1-2x_2 &\leqq 2, \\ -x_1+x_2 &\leqq 3, \\ x_1+x_2 &\leqq 4, \\ -2x_1-x_2 &\leqq 4, \\ x_1 &\geqq 0, \\ x_2 &\geqq 0; \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 3x_1-5x_2 &\leqq 15, \\ -5x_1+4x_2 &\leqq 20, \\ x_1+x_2 &\leqq 3, \\ -3x_1+5x_2 &\leqq 15, \\ x_1 &\geqq 0, \\ x_2 &\geqq 0; \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} 4x_1+x_2 &\geqq 4, \\ -2x_1+x_2 &\leqq 4, \\ x_1+2x_2 &\geqq 4, \\ x_1-x_2 &\leqq 4, \\ x_1 &\geqq 0, \\ x_2 &\geqq 0; \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} 5x_1+6x_2 &\leqq 30, \\ -x_1+x_2 &\leqq 3, \\ x_1-2x_2 &\leqq 6, \\ x_1+3x_2 &\geqq 6, \\ x_1 &\geqq 0, \\ x_2 &\geqq 0; \end{aligned}$$

e)
$$\begin{aligned} 3x_1-7x_2 &\leqq 21, \\ x_1^2+x_2 &\geqq 1, \\ x_1-2x_2 &\leqq 4, \\ 5x_1+2x_2 &\geqq 10, \\ x_1 &\geqq 0, \\ x_2 &\geqq 0; \end{aligned}$$

f)
$$\begin{aligned} x_1^2+x_2^2-6x_2 &\leqq 0, \\ -5x_1+3x_2 &\leqq 15, \\ -2x_1+5x_2 &\geqq 10, \\ x_1-4x_2 &\leqq 4, \\ x_1 &\geqq 0, \\ x_2 &\geqq 0. \end{aligned}$$

2. Konvex halmazok

Az előző pontban láttuk, hogy a kétismeretlenes egyenlőtlenség-rendszerek megoldásai (amennyiben létezik megoldás) egy síkbeli ponthalmazt alkotnak. A több ismeretlenes lineáris egyenlőtlenség-rendszerek megoldásai pedig (amennyiben létezik megoldásuk) egy több dimenziós ponthalmazt határoznak meg. Ez a ponthalmaz mindig konvex. Mivel a továbbiakban a több ismeretlenes lineáris egyenlőtlenség-rendszerek bizonyos tulajdonságú megoldásait keressük, melyek mindig egy konvex halmaz — mint megoldáshalmaz — pontjai, azért először célszerű a konvex halmazokkal kapcsolatos fontosabb fogalmakat, definíciókat és tételeket ismertetni. Tételezzük fel a továbbiakban, hogy egy n dimenziós E_n euklideszi tér ponthalmazával van dolgunk, és jelentse H ennek a halmaznak egy részhalmazát, azaz $H \subset E_n$. Az n dimenziós tér elemeit nevezhetjük n elemű vektoroknak, vagy egyszerűen pontoknak.

Az $\mathbf{a} \in E_n$ pont (vektor) ε *sugarú környezetén* mindazon $\mathbf{x} \in E_n$ pontok (vektorok) halmazát értjük, amelyek eleget tesznek az

$$|\mathbf{a}-\mathbf{x}| < \varepsilon \qquad (\varepsilon > 0)$$

egyenlőtlenségnek.

Ha $\mathbf{a} \in E_n$ és $\mathbf{b} \in E_n$, akkor a

$$\lambda\mathbf{a}+(1-\lambda)\mathbf{b} \qquad (0 \leqq \lambda \leqq 1)$$

konvex lineáris kombinációval előállítható vektorok halmazát az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ pontok által meghatározott *szakasznak* nevezzük. Ha $\mathbf{a} = \mathbf{b}$, akkor a szakasz egyetlen pontból áll.

Ha $\mathbf{a} \in E_n$ és $\mathbf{b} \in E_n$, akkor a

$$\lambda\mathbf{a}+(1-\lambda)\mathbf{b} \qquad \text{(ahol } \lambda \text{ tetszőleges valós szám)}$$

lineáris kombinációval előállítható pontok halmazát az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ pontok által meghatározott *egyenesnek* nevezzük.

Az $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ ponthoz tartozó sugáron az

$$X = \{\mathbf{x} = \lambda\mathbf{a},\ \lambda \geqq 0\}$$

ponthalmazt értjük.

Egy halmazt *konvexnek* mondunk akkor, ha a halmaz bármely két pontja által meghatározott szakasz minden pontja eleme a halmaznak. Az egyetlen pontból álló halmazt is konvexnek tekintjük.

Egy K konvex halmaz *belső pontjának* nevezzük az $\mathbf{a}$ pontot akkor, ha $\mathbf{a} \in K$, és az $\mathbf{a}$ pontnak van olyan $\varepsilon > 0$ sugarú környezete, amelynek minden pontja a K konvex halmazhoz tartozik.

A K konvex halmaz *határpontjának* nevezzük azt a $\mathbf{p}$ pontot, amelynek bármilyen kicsiny $\varepsilon > 0$ sugarú környezetében van a K-hoz és a $\bar{K}$-hoz tartozó pontja. Ha a K-hoz hozzá tartoznak a határpontok, akkor a halmaz *zárt*.

A határpontok között fontos szerepet játszanak az extremális pontok. A $\mathbf{p}$ pont *extremális pontja* a K konvex halmaznak, ha a halmazban nincsen olyan szakasz, melynek a $\mathbf{p}$ pont felezési pontja volna, továbbá $\mathbf{p} \in K$. Az egyetlen pontból álló halmaz pontját extremális pontnak tekintjük.

A K konvex halmazt *korlátosnak* mondjuk, ha megadható egy olyan szám, amelynél a halmaznak nincs hosszabb szakasza.

Konvex poliédernek az olyan zárt, konvex halmazt nevezzük, amely eleget tesz az alábbi két feltételnek:

a) korlátos,

b) véges sok extremális pontja van.

(A konvex poliéder extremális pontjait csúcspontoknak is szokták mondani.)

Legyen $\mathbf{a}_0$ a K konvex halmaz tetszőleges vektora! Állítsuk elő azt a vektorhalmazt, amely mindazokat a vektorokat tartalmazza (és csak azokat), amelyek a következő alakban írhatók fel: $\mathbf{x}-\mathbf{a}_0$, ahol $\mathbf{x}$ tetszőleges vektora a K halmaznak! A K konvex halmaz *dimenzióján* az így előállított vektorhalmaz dimenzióját értjük.

Az olyan n dimenziós konvex poliédert, melynek $n+1$ extremális pontja van, *szimplexnek* nevezzük.

Legyen adva a következő n ismeretlenes lineáris egyenlet:

$$\mathbf{c}^*\mathbf{x} = c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n = b, \qquad \text{ahol } \mathbf{c} \neq \mathbf{0},$$

és $c_1, c_2, \ldots, c_n, b$ adott valós számok! Tekintsük azon $\mathbf{x}$ pontok halmazát, amelyek kielégítik a $\mathbf{c}^*\mathbf{x} = b$ egyenletet! Azaz

$$X = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{c}^*\mathbf{x} = b\}.$$

Az így definiált X halmazt az n dimenziós euklideszi tér egy *hipersíkjának* nevezzük. Látható, hogy a hipersíkhoz csak akkor tartozik az $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ vektor, ha $\mathbf{c}^*\mathbf{x} = 0$.

A $\mathbf{c}^*\mathbf{x} = 0$ egyenlettel megadott hipersík *minden vektorára merőleges a* $\mathbf{c}^*$ *vektor* (mivel a definíció szerint két vektor merőlegességének az a feltétele, hogy a skaláris szorzatuk zérus legyen), és így merőleges magára a hipersíkra is. Ha $b \neq 0$, akkor a $\mathbf{c}^*\mathbf{x} = b$ hipersík nem tartalmazza az $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ vektort.

A $\mathbf{c}^*\mathbf{x} = b$ lineáris egyenlettel megadott hipersík *bármely két vektorának különbsége által meghatározott vektorra merőleges a* $\mathbf{c}^*$ *vektor.*

Bármely $\mathbf{c}^*\mathbf{x} = b$ hipersík az n dimenziós euklideszi teret *három diszjunkt halmazra* bontja, melyek együtt az egész E_n teret adják. Ezt a három halmazt jelöljük a következőképpen:

$$H_1 = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{c}^*\mathbf{x} < b\},$$
$$H_2 = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{c}^*\mathbf{x} = b\},$$
$$H_3 = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{c}^*\mathbf{x} > b\}.$$

(A H_1 és H_3 halmazokat nyitott féltereknek nevezzük. Ha képezzük a nyitott féltereknek a H_2 hipersíkkal alkotott egyesített halmazát, akkor zárt féltereket kapunk. Zárt félterek tehát a

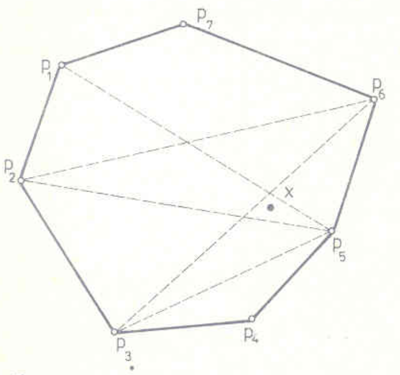
$$H_4 = H_1 \cup H_2$$
$$H_5 = H_3 \cup H_2$$

halmazok.)

Minden hipersík zárt halmazt alkot, mivel egy hipersík bármely pontja határpont.

Minden hipersík konvex halmaz. (Bármely két pontját összekötő szakasz minden pontja a hipersíkhoz tartozik.)

Véges számú konvex halmaz közös részét képező halmaz is konvex, és ha mindegyik halmaz zárt is, akkor a közös részük is zárt.



7. ábra

Egy konvex poliéder bármely pontja előállítható csúcspontjainak konvex lineáris kombinációjaként. (Ezt nevezik a konvex poliéderek főtételének.) Ha megnézzük a *7. ábrát,* akkor látjuk, hogy a K halmaz egy konvex poliéder, melynek hét csúcspontja van, $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_7$. A tétel értelmében bármely $\mathbf{x} \in K$ pontra fennáll, hogy

$$\mathbf{x} = \lambda_1\mathbf{p}_1 + \lambda_2\mathbf{p}_2 + \ldots + \lambda_7\mathbf{p}_7,$$

ahol $\sum_{i=1}^{7} \lambda_i = 1$, továbbá $0 \leqq \lambda_i \leqq 1$ $(i = 1, 2, \ldots, 7)$.

A tétel nem mondja ki azt, hogy az előállítás egyértelmű. Ez nem is igaz általában. Például nézzük meg a *7. ábrán* látható $\mathbf{x}$ pontot! Ez a K halmaz hét csúcspontjának konvex lineáris kombinációjaként többféleképpen is előállítható. Minthogy az $\mathbf{x}$ pont eleme a $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$, $\mathbf{p}_5$ csúcspontok által meghatározott konvex háromszögnek, a tétel értelmében előállítható ezen csúcspontok konvex lineáris kombinációjaként. Mivel az $\mathbf{x}$ pont nincs rajta ezen háromszög egyik oldalán sem, azért az $\mathbf{x} = \lambda_1'\mathbf{p}_1 + \lambda_2'\mathbf{p}_2 + \lambda_5'\mathbf{p}_5$ konvex lineáris kombinációban szereplő λ_1', λ_2', λ_5' értékek mindegyike nagyobb zérusnál. Ugyanakkor az $\mathbf{x}$ pont eleme a $\mathbf{p}_2$, $\mathbf{p}_5$, $\mathbf{p}_6$ csúcspontok által meghatározott konvex háromszögnek is, tehát ezen csúcspontok konvex lineáris kombinációjaként is előállítható, azaz $\mathbf{x} = \lambda_2''\mathbf{p}_2 + \lambda_5''\mathbf{p}_5 + \lambda_6''\mathbf{p}_6$. Mivel ezen háromszög egyik oldalán sem fekszik rajta az $\mathbf{x}$ pont, azért ebben a konvex lineáris kombinációban is pozitívak a skalárszorzók, azaz $\lambda_2'', \lambda_5'', \lambda_6'' > 0$. Hasonlóan belátható — a *7. ábra* alapján —, hogy az $\mathbf{x}$ vektor még a $\mathbf{p}_3, \mathbf{p}_5, \mathbf{p}_6$ csúcspontok, $\mathbf{p}_4, \mathbf{p}_5, \mathbf{p}_7$ csúcspontok stb. által meghatározott konvex háromszögeknek is pontja, vagyis ezeknek a csúcspontoknak a konvex lineáris kombinációjaként is előállítható. Ez pedig már mutatja, hogy az ábrán látható $\mathbf{x}$ vektor a $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_7$ csúcspontok konvex lineáris kombinációjaként többféleképpen is előállítható.

Feladatok

5. Határozza meg, hogy az $\mathbf{a}$ pont ε sugarú környezetén belül fekszenek-e az $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{x}_3$ pontok, ha

a) $\mathbf{a}^* = [0;\ 0]$, $\mathbf{x}_1^* = [0{,}1;\ 0{,}1]$, $\mathbf{x}_2^* = [0{,}1;\ 0{,}01]$, $\mathbf{x}_3^* = [0{,}1;\ -0{,}1]$ és $\varepsilon = 0{,}15$; igen

b) $\mathbf{a}^* = [1;\ 2]$, $\mathbf{x}_1^* = [0{,}99;\ 1{,}98]$, $\mathbf{x}_2^* = [1{,}1;\ 2{,}1]$, $\mathbf{x}_3^* = [0{,}9;\ -1{,}9]$ és $\varepsilon = 0{,}1$;

c) $\mathbf{a}^* = [1;\ 1;\ -1]$, $\mathbf{x}_1^* = [0{,}9;\ 1{,}1;\ -0{,}9]$, $\mathbf{x}_2^* = [1{,}01;\ 0{,}99;\ -1{,}01]$, $\mathbf{x}_3^* = [1;\ 0{,}99;\ -1]$ és $\varepsilon = 0{,}011$;

d) $\mathbf{a}^* = [2;\ 1;\ 1;\ 2;\ 1]$, $\mathbf{x}_1^* = [2{,}02;\ 0{,}98;\ 1{,}001;\ 1{,}999;\ 1{,}001]$, $\mathbf{x}_2^* = [1{,}99;\ 1{,}01;\ 1{,}01;\ 2;\ 0{,}99]$, $\mathbf{x}_3^* = [2;\ 1{,}02;\ 1{,}001;\ 1{,}98;\ 0{,}998]$ és $\varepsilon = 0{,}025$!

6. Adjon meg olyan pontokat, amelyek az $\mathbf{a}$ pont ε sugarú környezetén belül helyezkednek el, ha

a) $\mathbf{a}^* = [2;\ -1;\ 1]$, $\varepsilon = 0{,}1$;

b) $\mathbf{a}^* = [1;\ 4;\ 1;\ 2]$, $\varepsilon = 0{,}01$;

c) $\mathbf{a}^* = [0{,}3;\ -0{,}2;\ 0{,}1;\ 0{,}11]$, $\varepsilon = 0{,}02$;

d) $\mathbf{a}^* = [7;\ 4;\ 3;\ -2]$, $\varepsilon = 0{,}012$!

7. Határozza meg, hogy az $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{x}_3$ pontok közül melyek fekszenek rajta az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ pontok által meghatározott szakaszon, ha

a) $\mathbf{a}^* = [3;\ 4;\ 7]$, $\mathbf{b}^* = [6;\ 8;\ 2]$, $\mathbf{x}_1^* = \left[5;\ \frac{20}{3};\ \frac{11}{3}\right]$, $\mathbf{x}_2^* = [5{,}7;\ 7{,}6;\ 2{,}5]$, $\mathbf{x}_3^* = [4{,}5;\ 6;\ 4]$; igen igen nem

b) $\mathbf{a}^* = [7;\ -5;\ 3]$, $\mathbf{b}^* = [9;\ 5;\ -7]$, $\mathbf{x}_1^* = [8{,}6;\ 3;\ -5]$, $\mathbf{x}_2^* = [8;\ -1;\ -2]$, $\mathbf{x}_3^* = [7{,}8;\ -1;\ -1]$;

c) $\mathbf{a}^* = [10;\ 6;\ -4;\ 1]$, $\mathbf{b}^* = [0;\ 4;\ 2;\ -9]$, $\mathbf{x}_1^* = [5;\ 5;\ -1;\ -4]$, $\mathbf{x}_2^* = [0;\ 4;\ 2;\ -9]$, $\mathbf{x}_3^* = [4;\ 4;\ 4;\ 2]$;

d) $\mathbf{a}^* = [\lambda;\ 6;\ 2\lambda]$, $\mathbf{b}^* = [3\lambda;\ -6;\ 2\lambda]$, $\mathbf{x}_1^* = [\lambda;\ 3;\ -\lambda]$, $\mathbf{x}_2^* = [2{,}5\lambda;\ -3;\ 2\lambda]$, $\mathbf{x}_3^* = [2\lambda;\ 0;\ 2\lambda]$!

8. Adjon meg olyan pontokat, amelyek rajta fekszenek az **a** és **b** pontok által meghatározott szakaszon, ha

a) $\mathbf{a}^* = [1; -1; 3]$, $\mathbf{b}^* = [-1; 1; 3]$;
b) $\mathbf{a}^* = [c; 4; 2c]$, $\mathbf{b}^* = [3; -c; 4]$;
c) $\mathbf{a}^* = [1; 1; 1; 1]$, $\mathbf{b}^* = [-1; -1; -1; -1]$;
d) $\mathbf{a}^* = [5; -7; 4; -2]$, $\mathbf{b}^* = [1; 5; -6; 9]$!

9. Határozza meg α és β értékét úgy, hogy az **x** vektor rajta feküdjön az **a** és **b** vektorok által meghatározott szakaszon, ha

$\lambda \underline{a} + (1-\lambda)\underline{b} = \underline{x}$

a) $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 7 \\ -5{,}5 \\ -5 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 6 \\ -4 \\ \alpha \end{bmatrix}$; $\alpha = -$[illegible]2

b) $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ -9 \\ -4 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 22 \\ 11 \\ \alpha \end{bmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 20 \\ \beta \\ -40 \end{bmatrix}$;

c) $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \beta \\ 2 \\ -2 \\ 13 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 7 \\ \alpha \\ -1 \\ 12 \end{bmatrix}$;

d) $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \alpha \\ 7 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 8 \\ -5 \\ 10 \\ 11 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 7 \\ \beta-2 \end{bmatrix}$!

10. Határozza meg, hogy az $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{x}_3$ pontok közül melyek fekszenek rajta az **a** és **b** pontok által meghatározott egyenesen, ha

a) $\mathbf{a}^* = [4; -1]$, $\mathbf{b}^* = [-3; 9]$, $\mathbf{x}_1^* = [11; -11]$, $\mathbf{x}_2^* = [25; -31]$, $\mathbf{x}_3^* = [-17; 29]$;
b) $\mathbf{a}^* = [4; 9]$, $\mathbf{b}^* = [9; -6]$, $\mathbf{x}_1^* = [-26; 99]$, $\mathbf{x}_2^* = [17; 12]$, $\mathbf{x}_3^* = [-7; 63]$;
c) $\mathbf{a}^* = [1; -1{,}2]$, $\mathbf{b}^* = [4; 2; 3]$, $\mathbf{x}_1^* = [10; 8; 5]$, $\mathbf{x}_2^* = [6; 0; 7]$, $\mathbf{x}_3^* = [-8; -10; -1]$;
d) $\mathbf{a}^* = [1; 2; -1; 3]$, $\mathbf{b}^* = [4; 1; 0; 1]$, $\mathbf{x}_1^* = [6; 5; -3; 2]$, $\mathbf{x}_2^* = [10; -1; 2; -3]$, $\mathbf{x}_3^* = [4-3\lambda; 1+\lambda; -\lambda; 1+2\lambda]$!

11. Adjon meg néhány olyan pontot, melyek rajta fekszenek az **a** és **b** pontok által meghatározott egyenesen, ha

a) $\mathbf{a}^* = [5; 2]$, $\mathbf{b}^* = [1; 9]$;
b) $\mathbf{a}^* = [4; 1; 6]$, $\mathbf{b}^* = [-1; -8; -3]$;
c) $\mathbf{a}^* = [3; 0; 1; -1]$, $\mathbf{b}^* = [8; 9; 7; 6]$;
d) $\mathbf{a}^* = [\lambda+2; 1+2\lambda; 3]$, $\mathbf{b}^* = [\lambda-1; 2; \lambda+1]$!

12. Határozza meg a paraméterek értékét úgy, hogy az $\mathbf{x}$ vektor rajta feküdjön az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ pontok által meghatározott egyenesen, ha

$$a)\ \mathbf{a}=\begin{bmatrix}5\\-7\\11\end{bmatrix},\qquad \mathbf{b}=\begin{bmatrix}2\\11\\8\end{bmatrix},\qquad \mathbf{x}=\begin{bmatrix}17\\\alpha\\\beta\end{bmatrix};$$

$$b)\ \mathbf{a}=\begin{bmatrix}9\\3\\\alpha\end{bmatrix},\qquad \mathbf{b}=\begin{bmatrix}12\\\beta\\7\end{bmatrix},\qquad \mathbf{x}=\begin{bmatrix}30\\10\\55\end{bmatrix};$$

$$c)\ \mathbf{a}=\begin{bmatrix}\alpha\\-3\\-4\\\beta\end{bmatrix},\qquad \mathbf{b}=\begin{bmatrix}9\\\beta\\\beta\\\alpha\end{bmatrix},\qquad \mathbf{x}=\begin{bmatrix}-12\\-23\\-26\\17\end{bmatrix};$$

$$d)\ \mathbf{a}=\begin{bmatrix}\alpha\\\beta\\-3\\\alpha\end{bmatrix},\qquad \mathbf{b}=\begin{bmatrix}\beta\\\alpha\\0\\3\end{bmatrix},\qquad \mathbf{x}=\begin{bmatrix}-5\\\gamma\\-30\\13\end{bmatrix}!$$

[A *c)* és *d)* feladatoknál a paraméterek meghatározása egy egyenletrendszer megoldásával történhet.]

13. Adjon meg néhány olyan pontot, melyek pontjai az $\mathbf{a}$ vektor által meghatározott félegyenesnek (sugárnak), ha

a) $\mathbf{a}^* = [1; 1; 1]$, *b)* $\mathbf{a}^* = [-1; 2; 4; 1]$,
c) $\mathbf{a}^* = [1; 0; -2; -7]$, *d)* $\mathbf{a}^* = [\lambda; -\lambda; 1; 2\lambda]$!

14. Határozza meg, hogy az alábbi egyenlőtlenség-rendszerek megoldásait adó pontok zárt, korlátos, konvex halmazt alkotnak-e?

a) $x^2+y^2 < 16$, $x+y \leqq 4$;
b) $x^2-y^2 \leqq 100$, $x \geqq 0; y > 0$;
c) $x^2-y \leqq 0$, $x \geqq 0; y \geqq 0$;
d) $x^2-y \geqq 0$, $x \geqq 0; y \geqq 0$.

15. Határozza meg, hogy az alábbi egyenlőtlenség-rendszer megoldáshalmazának az $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{x}_3$ pontjai közül melyek a belső és melyek a határpontok! A határpontok közül melyek azok, amelyek egyben extremális pontok is?

$a)$ $3x+4y \leqq 12,$
$-x+\ y \leqq\ 2,$
$x-3y \leqq\ 3;$

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}, \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix};$$

$b)$ $x-5y \leqq\ 5,$
$3x+5y \leqq 15,$
$-3x+\ y \leqq\ 3;$

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix}5\\0\end{bmatrix}, \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix};$$

$c)$ $x^2+\ y^2 \leqq 29,$
$-x\ -y\ \leqq\ 1,$
$-4x\ +3y\ \leqq 12;$

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix}5\\2\end{bmatrix}, \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix};$$

$d)$ $x^2-y \leqq 4,$
$x\ +y \leqq 2,$
$-x\ +y \leqq 2;$

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}, \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix}0\\-4\end{bmatrix}.$$

16. Adjon meg olyan pontokat, amelyek az alábbi egyenlőtlenség-rendszer megoldáshalmazának belső pontjai, határpontjai (extremális pontjai), ha az egyenlőtlenség-rendszer:

$a)$ $5x-2y \leqq 10,$
$x+2y \geqq\ 2,$
$-3x+5y \leqq 15;$

$b)$ $x-3y \leqq 3,$
$-3x+2y \leqq 6,$
$x+\ y \geqq\ 3;$

$c)$ $x^2+y^2 \leqq 4y,$
$x\ +y\ > 0,$
$-x\ +y\ > 0;$

$d)$ $x\ -y \leqq 4,$
$x^2-y < 2,$
$-2x\ +y \leqq 2.$

17. Adjon meg olyan pontokat, amelyek rajta fekszenek a $\mathbf{c}^*\mathbf{x} = b$ hipersíkon, ha

$a)$ $\mathbf{c}^* = [1; -1; 1],\ b = 4;$
$b)$ $\mathbf{c}^* = [10; 1; 6],\ b = 8;$
$c)$ $\mathbf{c}^* = [-1; 4; 7; 2],\ b = 5;$
$d)$ $\mathbf{c}^* = [1; -2; 1; -2; 1],\ b = 20.$

18. Hogyan kell megválasztani az α és a β paraméterértékeket, ha azt akarjuk, hogy a $\mathbf{c}^*\mathbf{x} = b$ hipersíknak az $\mathbf{x}_1$ vektor pontja legyen, az $\mathbf{x}_2$ vektor pedig ne legyen pontja, ha *a)* $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\quad \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ \alpha \\ -1 \end{bmatrix}$, $\quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ \beta \end{bmatrix}$, $\quad b = 4$;

b) $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\quad \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ \alpha \\ \alpha \end{bmatrix}$, $\quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ \beta \\ -2 \end{bmatrix}$, $\quad b = -2$;

c) $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\quad \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} \alpha \\ 1 \\ \alpha \\ 1 \\ \alpha \end{bmatrix}$, $\quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ \beta \\ \beta \\ 4 \end{bmatrix}$, $\quad b = 8$;

d) $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}$, $\quad \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ \alpha \\ 1 \\ \alpha \end{bmatrix}$, $\quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ \beta \\ 5 \\ -\beta \\ 5 \end{bmatrix}$, $\quad b = 6$?

19. Vázolja fel a $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$, $\mathbf{p}_3$ extremális pontok által meghatározott konvex poliédert, és állítsa elő az **a** pontot az extremális pontok konvex lineáris kombinációjaként, ha

a) $\mathbf{p}_1^* = [0;\ 0]$, $\mathbf{p}_2^* = [2;\ 0]$, $\mathbf{p}_3^* = [1;\ 1]$, $\mathbf{a}^* = \left[\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right]$;

b) $\mathbf{p}_1^* = [1;\ 3]$, $\mathbf{p}_2^* = [5;\ -4]$, $\mathbf{p}_3^* = [2;\ 7]$, $\mathbf{a}^* = \left[\frac{5}{2};\ \frac{13}{4}\right]$;

c) $\mathbf{p}_1^* = [0;\ 0;\ 0]$, $\mathbf{p}_2^* = [1;\ 2;\ 3]$, $\mathbf{p}_3^* = [-1;\ 4;\ 6]$, $\mathbf{a}^* = \left[\frac{1}{2};\ 1;\ \frac{3}{2}\right]$;

d) $\mathbf{p}_1^* = [1;\ -1;\ 1]$, $\mathbf{p}_2^* = [-1;\ 1;\ 1]$, $\mathbf{p}_3^* = [1;\ 1;\ -1]$, $\mathbf{a}^* = \left[\frac{1}{3};\ \frac{1}{3};\ \frac{1}{3}\right]$!

20. Bizonyítsa be, hogy az

a) **a** és **b** vektorok által meghatározott szakasz pontjai,
b) **a** és **b** vektorok által meghatározott egyenes pontjai,
c) **a** vektor ($\mathbf{a} > \mathbf{0}$) által meghatározott sugár pontjai,
d) **a** vektor ε sugarú ($\varepsilon > 0$) környezetének pontjai konvex halmazt alkotnak!

21. Bizonyítsa be, hogy véges számú zárt féltér metszetének csak véges számú extremális pontja lehet az E_n-ben!

22. Bizonyítsa be, hogy m darab zárt féltérnek egy szigorúan korlátos metszete konvex poliéder! (Csak azt kell kimutatni, hogy a metszetnek véges számú extremális pontja van.)

23. Bizonyítsa be, hogy a $\mathbf{c}_i^*\mathbf{x} = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ egyenletrendszerrel megadott k darab hipersík metszete az E_n-ben $n—k$ dimenziós, ha a $\mathbf{c}_i$ vektorok lineárisan függetlenek! Mutassa ki, hogy egy euklideszi térnek bármely $n—k$ dimenziós altere k darab hipersík metszeteként állítható elő!

24. Legyen $\mathbf{A}$ egy $(n \times r)$ típusú mátrix. Mutassuk meg, hogy vagy van egy olyan $\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}$ vektor, amelyre igaz a

$$\sum_{i=1}^{r} x_i = 1 \text{ és } \mathbf{Ax} \leqq \mathbf{0};$$

vagy van egy olyan $\mathbf{y} \geqq \mathbf{0}$ vektor, amelyre igaz:

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = 1 \text{ és } \mathbf{y^*A} \geqq \mathbf{0}^*.$$

25. Határozza meg, hogy a következő állítások közül melyik igaz és melyik hamis! (Válaszát indokolja!)

h *a)* Bármelyik síkbeli szabályos sokszög szimplex. n dim.-s konvex poliéder, melynek n+1 csúcspontja van: szimplex

h *b)* Egy konvex halmazból egy tetszőleges pontot elhagyva mindig konvex halmazt kapunk. elhagyunk egy belső pontot, akkor nem lesz olyan szakasz, amelynek nem minden pontja halmazbeli!

h *c)* Egy konvex halmazból egy tetszőleges pontot elhagyva, sohasem kapunk konvex halmazt. (elhagyunk egy csúcsot)

i *d)* Van olyan zárt halmaz, amelyik nem konvex.

i *e)* Van olyan konvex halmaz, amelynek végtelen sok extremális pontja van.

h *f)* Két konvex halmaz közös része lehet nem konvex is. Az ellenkezője igaz!

i *g)* Van olyan konvex halmaz, amelynek nincs egyetlen csúcspontja sem.

i *h)* Az $X = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} = \lambda\mathbf{a}+(1—\lambda)\mathbf{b}$, ahol $\lambda < 0$ és $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ azonos elemszámú tetszőleges vektorok$\}$ halmaz konvex. félegyenes, két pontjának összekötő szakasza is benne van

i *i)* Az $X = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} = \lambda\mathbf{a}+(1—\lambda)\mathbf{b}$, ahol $\lambda > 0$ és $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ azonos elemszámú tetszőleges vektorok$\}$ halmaz konvex.

h *j)* Az $x^2+100y^2 = 50$ egyenletet kielégítő pontok halmaza konvex. (Az egyenlőség miatt csak a határpontokat vesszük)

i *k)* Az

$$x_1^2—x_2 \leqq 0,$$
$$—x_1+x_2 \leqq 2$$

egyenlőtlenség-rendszert kielégítő pontok halmaza konvex.

h *l)* Az

$$x_2 \geqq 0,$$
$$x_2 \leqq +\sqrt{1—x_1^2},$$
$$|x_1| \leqq 1$$

egyenlőtlenség-rendszerrel megadott halmaznak pontosan két extremális pontja van.

h *m)* Egy H halmaz konvex, ha a H bármely $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ pontjával együtt az $\mathbf{x} = \frac{1}{2}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2)$ pontot is tartalmazza.

minden konvex halmaz ilyen!
De: ha H nem [illegible], a felezőpontok benne vannak de a korlátai [illegible] nem!

i *n)* Van olyan konvex halmaz, amelynek minden pontja határpont.

h *o)* Az $\mathbf{a}^* = [2;\ 2;\ 1;\ 1]$ pont rajta fekszik az $\mathbf{x}_1^* = [3;\ 1;\ -1;\ 1]$ és az $\mathbf{x}_2^* = [1;\ 3;\ 3;\ -3]$ pontok által meghatározott egyenesen.

$$3\lambda + (1-\lambda)\,1 = 2 \rightarrow \lambda = \frac{1}{2}$$

— egyenes [illegible] hiányzik

$$\lambda + (1-\lambda)\,3 = 2 \rightarrow \lambda = \frac{1}{2}$$

$$-\lambda + (1-\lambda)\,3 = 1 \rightarrow \lambda = \frac{1}{2}$$

$$\lambda + (1-\lambda)(-3) = 1 \rightarrow \underline{\lambda = 1}$$

→ ext. pont: nincs a halmazban olyan szakasz, melynek az adott pont felezőpontja volna

csúcspont: konvex poliéder extremális pontjai

3. A lineáris programozás alapfeladata

Tekintsük a következő feladatot: egy üzem három erőforrás segítségével négyféle terméket állít elő. A termékegységre vonatkozó ráfordításokat (technológiai együtthatókat), az egyes erőforrásokból rendelkezésre álló mennyiségeket (kapacitásokat), valamint az egyes termékek eladási árát (fajlagos árakat) az alábbi táblázat mutatja.

Erőforrások	Termékek				Rendelkezésre álló erőforrásmennyiség
	1. termék	2. termék	3. termék	4. termék	
I. erőforrás	2	1	0	3	211
II. erőforrás	1	2	1	3	300
III. erőforrás	1	0	1	1	150
Eladási ár	120	100	90	140	

Mennyit termeljen az üzem az egyes termékekből, ha az a célja, hogy maximális árbevételt érjen el?

Nyilvánvaló, hogy csak olyan termelési programot lehet megvalósítani, amelynek erőforrásigénye nem haladja meg az egyes erőforrásokból rendelkezésre álló mennyiségeket. Ilyen termelési program jelen esetben végtelen sok van. Néhány megvalósítható termelési program látható a következő táblázatban.

Az egyes termékekből gyártandó mennyiségek	Lehetséges termelési programok					
	A	B	C	D	E	F
1. termék	100	50	0	17	16,5	0
2. termék	11	40	31	36	22,3	0
3. termék	50	50	48	40	92	0
4. termék	0	20	60	47	40	0
Árbevétel	17 600	17 300	15 820	15 820	18 090	0

Ha ezeket a termelési programokat megnézzük, akkor azt látjuk, hogy ezek megvalósítása esetén az üzemnek különböző nagyságú lesz az árbevétele. Mivel az üzem maximális árbevételre törekszik, azért részére két lehetséges program közül az a jobb, amelyik nagyobb árbevételt biztosít. Látható, hogy a táblázatban szereplő hat lehetséges program közül az E változat esetén lesz legnagyobb az árbevétel, éspedig 18 090 egység (Ft). (A legrosszabb az F változat, amikor az üzem nem termel semmit, és így árbevétele is zérus.) Kérdés azonban az, hogy van-e ennél jobb program, illetve melyik a legjobb program. Erre a kérdésre majd akkor tudunk válaszolni, ha már ismerjük az ilyen jellegű feladatok megoldásának technikáját. Előbb azonban írjuk fel a feladatot matematikai formulákkal!

Jelöljék az x_1, x_2, x_3, x_4 változók rendre az egyes termékekből gyártandó mennyiségeket! Az egyes termékekből csak annyit lehet gyártani, hogy ezek erőforrásigénye ne legyen több, mint amennyi az egyes erőforrásokból rendelkezésre áll. Ezt biztosítják a következő egyenlőtlenségek:

$$
\begin{aligned}
2x_1 + x_2 \phantom{{}+x_3} + 3x_4 &\leqq 211,\\
x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 &\leqq 300,\\
x_1 \phantom{{}+2x_2} + x_3 + x_4 &\leqq 150.
\end{aligned}
$$

Negatív mennyiségeket nem termelhetünk, azaz csak olyan számnégyesek alkothatják a termelési programot, amelyekre igaz, hogy

$$x_1 \geqq 0,\ x_2 \geqq 0,\ x_3 \geqq 0,\ x_4 \geqq 0.$$

Keressük azt az x_1, x_2, x_3, x_4 számnégyest, amely a leírt feltételeket kielégíti, és amelynél a

$$120x_1 + 100x_2 + 90x_3 + 140x_4$$

összeg maximális. A feladat tehát a következő formában írható fel:

$$
\begin{aligned}
2x_1 + x_2 \phantom{{}+x_3} + 3x_4 &\leqq 211,\\
x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 &\leqq 300,\\
x_1 \phantom{{}+2x_2} + x_3 + x_4 &\leqq 150,\\
x_1, x_2, x_3, x_4 &\geqq 0,\\
(120x_1 + 100x_2 + 90x_3 + 140x_4) &\to \max.
\end{aligned}
$$

Ezt nevezzük a feladat matematikai modelljének.

Az olyan feltételes szélsőérték-feladatot, amelyben lineáris egyenlőtlenségek és egyenletek által meghatározott halmazon egy lineáris függvény szélsőértékét keressük, *lineáris programozási feladatnak* nevezzük. A lineáris programozás feladatát általánosan az alábbi formában írhatjuk fel:

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1j}x_j+\ldots+a_{1n}x_n \leqq b_1,\\
&a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2j}x_j+\ldots+a_{2n}x_n \leqq b_2,\\
&\cdot\\
&\cdot\\
&\cdot\\
&a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\ldots+a_{ij}x_j+\ldots+a_{in}x_n \leqq b_i,\\
&\cdot\\
&\cdot\\
&\cdot\\
&a_{m1}x_1+a_{m2}x_2 \ldots+a_{mj}x_j+\ldots+a_{mn}x_n \leqq b_m,\\
&x_1 \geqq 0;\ x_2 \geqq 0;\ldots;\ x_j \geqq 0;\ \ldots;\ x_n \geqq 0.
\end{aligned}
$$

Ezen feltételek mellett keressük a

$$c_1x_1+c_2x_2\ldots+c_jx_j+\ldots+c_nx_n$$

ún. célfüggvény maximumát.

Az $a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\ldots+a_{in}x_n \leqq b_i$ egyenlőtlenséget az i-edik korlátozó feltételnek nevezzük. Ennek bal oldalán álló kifejezés azt mutatja, hogy az i-edik erőforrásból mennyit használnak fel összesen a termelés folyamán. Feltettük, hogy minden egyenlőtlenség lineáris. (Amennyiben az egyenlőtlenségek között nemlineárisak is lennének, a feladat nem a lineáris programozás körébe tartozna.)

Mindazon $\mathbf{x}$ vektorokat, illetve ezek halmazát, amelyek kielégítik a feltételrendszert, *lehetséges megoldásnak,* közülük azokat, melyekre a célfüggvény maximális, optimális *megoldásnak* nevezzük.

Feladatunkat mátrixalgebrai jelölésekkel is felírhatjuk. Ehhez azonban be kell vezetnünk a következő szimbólumokat.

Legyen

$$
\mathbf{A} = \begin{bmatrix}
a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n} \\
\cdot & \\
\cdot & \\
\cdot & \\
a_{m1} & a_{m2} \ldots a_{mn}
\end{bmatrix}
$$

(vagyis $\mathbf{A}$ jelöli a technológiai együtthatókból alkotott mátrixot);

$$
\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_m \end{bmatrix}, \qquad
\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}
$$

(**b** az egyes erőforrások kapacitásait, míg **x** az ismeretleneket tartalmazza);

$$\mathbf{c}^* = [c_1; c_2; \ldots; c_n]$$

(a vektor elemei az egyes termékek egységárai).
Feladatunk a bevezetett jelölésekkel a következőképpen írható:
Meghatározandó az az $\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}$ vektor, mely kielégíti az

$$\mathbf{Ax} \leqq \mathbf{b}$$

feltételeket, és amelyre a

$$\mathbf{c}^*\mathbf{x}$$

lineáris függvény maximális értéket vesz fel.

Előfordulnak olyan programozási feladatok is, ahol a korlátozó feltételek között $\geqq$ irányú egyenlőtlenségek is szerepelnek. Ilyen feltételekre vezetnek pl. bizonyos tervelőírások, a termékek közötti arányok fennállásának szükségessége stb. A $\geqq$ irányú egyenlőtlenségek azonban átalakíthatók $\leqq$ irányú egyenlőtlenségekké, ha az egyenlőtlenségek mindkét oldalát szorozzuk —1-gyel; pl. a $8x_1+2x_2-x_3 \geqq 16$ egyenlőtlenség helyett vehetjük a vele ekvivalens $-8x_1-2x_2+x_3 \leqq -16$ egyenlőtlenséget.

Ha a feltételek között egyenletek is szerepelnek, akkor minden egyenletet helyettesíthetünk két egyenlőtlenséggel.

Pl. a

$$3x_1-4x_2+x_3 = 14$$

egyenletet helyettesíthetjük a következő két egyenlőtlenséggel:

$$\begin{aligned} 3x_1-4x_2+x_3 &\leqq 14, \\ 3x_1-4x_2+x_3 &\geqq 14; \end{aligned}$$

vagy a második egyenlőtlenség mindkét oldalát —1-gyel beszorozva

$$\begin{aligned} 3x_1-4x_2+x_3 &\leqq 14, \\ -3x_1+4x_2-x_3 &\leqq -14. \end{aligned}$$

Látható tehát, hogy ha egy feltételrendszer bármilyen irányú lineáris egyenlőtlenségeket és lineáris egyenleteket is tartalmaz, mindig átalakítható egy olyan vele ekvivalens egyenlőtlenség-rendszerré, melynek általános alakja:

$$\mathbf{Ax} \leqq \mathbf{b}.$$

Egy adott $\mathbf{c}^*\mathbf{x}$ lineáris függvény az

$$\mathbf{Ax} \leqq \mathbf{b},$$
$$\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}$$

feltételrendszer által meghatározott halmazon ott veszi fel a minimumát, ahol (—1)-szerese a maximumát.

Ily módon mindazok a feladatok, melyeknél egy lineáris függvény (célfüggvény) maximumát vagy minimumát keressük adott lineáris egyenlőtlenségek vagy lineáris egyenlőségek által meghatározott $\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}$ vektorhalmazon, a következő általános alakban írhatók fel:

$$\mathbf{Ax} \leqq \mathbf{b},$$
$$\mathbf{x} \geqq \mathbf{0};$$
$$\mathbf{c}^*\mathbf{x} \to \max.$$

A lineáris programozás feladata éppen annak az $\mathbf{x}$ *vektornak (vagy azoknak az* $\mathbf{x}$ *vektoroknak) a meghatározása, mely eleget tesz egyrészt az*

$$\mathbf{Ax} \leqq \mathbf{b},$$
$$\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}$$

feltételeknek, másrészt amelyre a $\mathbf{c}^*\mathbf{x}$ *maximális.*

Feladatok

26. Írja fel az alábbi numerikus feladatokat (az egyenlőtlenségek és a célfüggvény megfelelő átalakításával) az

$$\mathbf{Ax} \leqq \mathbf{b},$$
$$\mathbf{x} \geqq \mathbf{0};$$
$$\mathbf{c}^*\mathbf{x} \to \max$$

alaknak megfelelő formában!

a)
$$\begin{aligned}
3x_1+2x_2+\ x_3 &\leqq 16,\\
x_1+3x_2-2x_3 &\geqq 4,\\
4x_1 \qquad -3x_3 &\geqq -5,\\
x_1, x_2, x_3 &\geqq 0,\\
(4x_1-2x_2+x_3) &\to \max;
\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned}
x_1+2x_2+3x_3 &\leqq 40,\\
-x_1-\ x_2+\ x_3 &\geqq 6,\\
4x_1-\ x_2+\ x_3 &= 8,\\
x_1, x_2, x_3 &\geqq 0,\\
(-3x_1-4x_2-2x_3) &\to \min;
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
c)\ & -x_1+x_2-x_3-2x_4 = -7,\\
& 2x_1 \quad -x_3- x_4 \geqq -6,\\
& 4x_1+x_2 \quad +2x_4 \leqq 20,\\
& x_1 \quad +x_3+ x_4 = 7,\\
& x_1, x_2, x_3, x_4 \geqq 0,\\
& (2x_1+x_2-x_3-3x_4) \to \max;\\
d)\ & x_1-x_2+ x_3- x_4+2x_5 = 10,\\
& x_1 \quad + x_3 \quad + x_5 = 6,\\
& x_1+x_2-2x_3-2x_4- x_5 \geqq -8,\\
& x_1+x_2+ x_3+ x_4+ x_5 \leqq 12,\\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geqq 0,\\
& (x_1-5x_2+x_5) \to \min.
\end{aligned}
$$

27. Mondjon olyan termelési programokat, amelyek megvalósíthatók, és határozza meg, hogy ezek megvalósítása esetén mennyi lenne a célfüggvény értéke, ha a lineáris programozási feladat matematikai modellje a következő:

$$
\begin{aligned}
a)\ & x_1+2x_2+ x_3 \leqq 12,\\
& 2x_1+ x_2+3x_3 \leqq 16,\\
& x_1+ x_2+ x_3 \leqq 10,\\
& x_1, x_2, x_3 \geqq 0,\\
& (4x_1+12x_2+13x_3) \to \max;\\
b)\ & 2x_1- x_2+x_3- x_4+ x_5 \leqq 16,\\
& x_1+ x_2 \quad + x_4+2x_5 \leqq 10,\\
& 3x_1+2x_2+x_3-2x_4+3x_5 \leqq 8,\\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geqq 0,\\
& (9x_1+8x_2+12x_3+8x_4+10x_5) \to \max;\\
c)\ & x_1+4x_2+x_3 \leqq 15,\\
& x_1+ x_2 \leqq 8,\\
& 3x_1 \quad +x_3 \geqq 10,\\
& x_1, x_2, x_3 \geqq 0,\\
& (9x_1+8x_2+7x_3) \to \max;\\
d)\ & 2x_1-x_2+ x_3 \quad +2x_5 \leqq 22,\\
& 3x_1 \quad + x_3+2x_4+ x_5 \geqq 8,\\
& x_1+x_2-2x_3+ x_4+ x_5 \geqq 20,\\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geqq 0,\\
& (8x_1+11x_2+9x_3+7x_4+5x_5) \to \max!
\end{aligned}
$$

28. Írja fel a következő feladatot matematikai formulákkal!

Egy gyár 5 féle terméket állít elő négy különböző erőforrás felhasználásával. Az egyes termékeket jelöljék az A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 kifejezések, míg az egyes erőforrásokat római számok jelöljék! Az egyes termékek fajlagos erőforrásigényét, az egyes erőforrásokból rendelkezésre álló mennyiségeket, valamint az egyes termékek egy darabjának előállításakor (esetleg eladásakor) keletkező nyereséget (fajlagos nyereségeket) az alábbi táblázat mutatja.

Erőforrások	Termékek					Erőforrások kapacitása
	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	
I.	1, x_1	3 x_2	2 x_3	2 x_4	4 x_5	$\leq$ 120
II.	2	1	2	1	1	$\leq$ 180
III.	3	6	0	0	3	$=$ 150
IV.	0	1	2	3	1	$\leq$ 60
Fajlagos nyereség	15 x_1	20 x_2	21 x_3	17 x_4	22 x_5	$\to$ max

Mennyit termeljen a gyár az egyes termékekből, ha az a célja, hogy a nyeresége maximális legyen, de az A_5-ből nem termelhet többet (több egységet), mint az A_4-ből, továbbá a III. erőforrásból rendelkezésre álló 150 egységet teljes egészében fel kell használni?

$\to -x_4 + x_5 \leq 0$

29. Egy üzem A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 típusú termékeket gyárt kétféle erőforrás segítségével. Írja fel annak a feladatnak a matematikai modelljét, amely eleget tesz a következő feltételeknek:

(1) az A_1 termékből kétszer annyit (egységet) kell termelni, mint az A_4-ből és az A_5-ből összesen;

(2) az A_3-ból és A_4-ből összesen legalább 500 Ft értékűt kell termelni;

(3) az A_2-ből legalább 20 darabbal többet kell termelni, mint az A_3-ból;

(4) az II. erőforrás kapacitását teljesen ki kell használni;

(5) az üzem célja a maximális árbevétel.

A rendelkezésre álló erőforrások kapacitását, valamint az egyes termékek fajlagos erőforrás igényét és árát az alábbi táblázat mutatja.

Erőforrások	Termékek					Erőforrások kapacitása
	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	
I.	2	1	0	3	1	$\leq$ 3000
II.	1	3	4	1	2	$=$ 2000
Ár (Ft-ban)	70	22	31	14	32	$\to$ max

$x_1 - 2x_4 - 2x_5 = 0$

$31x_3 + 14x_4 \geq 500$

$x_2 - x_3 \geq 20$

30. Egy gyár háromféle minőségű nyersanyagot (A_1, A_2, A_3) dolgoz fel. A nyersanyagok feldolgozása négyféle technológiai eljárással (T_1, T_2, T_3, T_4) történhet. Az egyes technológiai eljárások a különböző minőségű nyersanyagok bizonyos arányban történő felhasználását követelik meg. Valamennyi technológiai eljárás eredményeként háromféle végtermék (V_1, V_2, V_3) keletkezik, de ezek mennyisége függ attól, hogy melyik technológiai eljárást alkalmazzák. Az alábbi két táblázat azt mutatja, hogy az egyes technológiai eljárások egyszeri alkalmazásakor hány egységre van szükség az egyes nyersanyagokból; illetve hány egységnyi keletkezik az egyes végtermékekből; mennyi az alapanyagokból rendelkezésre álló mennyiség; mennyi az egyes végtermékek fajlagos hozama.

x_i: jelentse azt, hogy a T_i technológiai eljárást hányszor alkalm.

Nyersanyagok	Technológiák				Felhasználható nyersanyagmennyiség
	T_1	T_2	T_3	T_4	
A_1	4 x_1	6 x_2	1 x_3	3 x_4	$\leq$ 4000
A_2	8	2	7	4	$\leq$ 2000
A_3	3	5	6	7	$\leq$ 3000

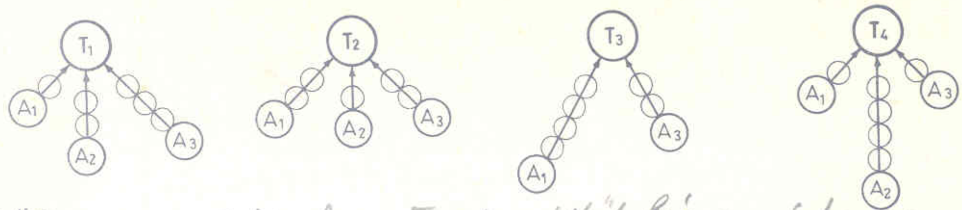
$x_i \geq 0$

Végtermékek	Technológiák				Végtermékek fajlagos hozama
	T_1	T_2	T_3	T_4	
V_1	5	2	10	1	20
V_2	10	1	4	3	10
V_3	2	6	1	4	5

ahol: $5 \cdot 20 + 10 \cdot 10 + 2 \cdot 5 = 210$) $210x_1 + 80x_2 + 245x_3 + 70x_4 \to \max.$

Írja fel azt a matematikai modellt, melynek alapján meghatározható, hogy az egyes technológiai eljárásokat hányszor alkalmazzák, ha célul a maximális hozam elérését tűzik ki! (Ennél a feladatnál tekintsünk el attól, hogy a technológiai eljárások száma mindenképpen egész szám legyen! Ez a modell felírását a tanult képletnek megfelelően lehetővé teszi.)

31. Négy különböző termék (T_1, T_2, T_3, T_4) előállításához az A_1, A_2, A_3 alapanyagokat használják fel. Az alapanyagoknak a termékekbe való beépülését a *8. ábrán* látható gráfok mutatják.



8. ábra

x_i: jelölje, hogy a T_i termékből hány egységet állítanak elő?

Az egyes alapanyagokból különböző mennyiség áll rendelkezésre, éspedig

az A_1 alapanyagból 360 egység, $1 \cdot x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 1 \cdot x_4 = 360$

az A_2 alapanyagból 400 egység, $2x_1 + x_2 + 4x_4 \leq 400$

az A_3 alapanyagból 300 egység. $3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 300$

A T_1 termék ára 18 Ft,

a T_2 termék ára 16 Ft, $x_i \geq 0$

a T_3 termék ára 19 Ft, $18x_1 + 16x_2 + 19x_3 + 20x_4 \to \max.$

a T_4 termék ára 20 Ft.

Az A_1 és az A_3 alapanyag romlandó, azért ezek teljes mennyiségét fel kell használni a termékek előállításához. Hány egységet állítsanak elő az egyes termékekből, ha a cél a maximális árbevétel? Írja fel a feladatnak megfelelő matematikai modellt!

32. A tehenek súlyának és tejhozamának adott szinten tartásához 18,26 egység kalóriára, 1832 g fehérjeféleségre, 118 g kalciumra és 72 g foszforra van szükség. Tegyük fel, hogy a tehenek takarmányát lóhereszénából, rétiszénából, takarmányrépából, burgonyából, napraforgóból és bizonyos koncentrátumból állítják össze! Ezek 1 kg-ja a felsorolt tápanyagokat az alábbi táblázat szerinti mennyiségben tartalmazza.

Takarmányok megnevezése	A takarmány 1 kg-jában levő kalória (egység)	fehérje (g)	kálcium (g)	foszfor (g)	1 kg takarmány ára (Ft)
Lóhereszéna	0,54 x_1	56	9,31	1,96	1,62
Rétiszéna	0,52 x_2	38	6,02	2,18	1,45
Takarmányrépa	0,12 x_3	3	0,42	0,33	0,52
Burgonya	0,30 x_4	9	0,16	0,72	1,54
Napraforgó	0,31 x_5	12	3,55	0,68	2,82
Koncentrátum	1,32 x_6	198	2,72	8,11	8,02
	$\geq 18,26$	≥ 1832	≥ 118	≥ 72	

A takarmányféleségek árait is mutatja a táblázat. A felsorolt takarmányféleségekből olyan takarmánykeveréket kell készíteni, amely a szükséges anyagokat legalább az előírt mennyiségben tartalmazza, és emellett költsége minimális. Írja fel azt a matematikai modellt, amelynek alapján meghatározható, hogy (az adott feltételek mellett) az egyes takarmányokból hány kilogrammot kell tenni a takarmánykeverékbe!

$x_i \geq 0$ $x_i = ?$

$1,62x_1 + 1,45x_2 + \ldots + 8,02x_6 \to \min.$

33. A MOKKA Kávécsomagoló Vállalat (továbbiakban MOKKA) a kávébabot zölden vásárolja Latin-Amerikából és Afrikából, az illetékes külkereskedelmi vállalat közvetítésével. A vásárolt kávébabot a budapesti telephelyen pörköli, keveri és csomagolja. A kávékeveréket csak belföldön forgalmazza. A különféle kávéfajták ára is különböző. A MOKKA csak olyan kávékeveréket hozhat forgalomba, amely az előírt minőségi követelményeknek megfelel. A vásárláskor tehát a jövedelmezőségi szempontok mellett ezt is figyelembe kell vennie.

A MOKKA főmérnöke nem régen fejezett be sikeresen egy munkát, amelynek keretében megpróbálta a kávé fő minőségi jellemzőit kvantifikálni. A kávé ízének elbírálásában az erő, aroma, koffeintartalom, sűrűség, szín és savtartalom a legfontosabb tényezők. Ezek közül négyre — erő, sűrűség, aroma, szín — a főmérnök egytől tízig terjedő minőségi skálát állított fel (tízes a legjobb). A koffein- és a savtartalom mérése az egyszerűbb eset, mivel a koffeint milligrammban, a savtartalmat pedig a kávé pH-faktorával lehet mérni.

A MOKKA a kávékeveréket hatféle kávéfajtából állíthatja elő. Ezek a következők:

Santos 4,
Rio,
Victoria,
Manizales,
Mexikó,
Liberica.

Az első öt kávéfajtát Dél-Amerikából (Brazíliából és Kolumbiából), a hatodik kávéfajtát pedig Afrikából (Etiópiából) importálja a vállalat. Az egyes kávéfajták importálható mennyiségére semmi kikötés nincs. Tehát bármelyikből, az igényeknek megfelelően, tetszőleges mennyiség vásárolható. Azonban ezeknél a kávéfajtáknál a felsorolt hat fontos jellemző általában eltérő, sőt a vételáruk is különböző. Ezeket a jellemzőket, valamint 1 kg zöld kávébab árát (USA dollárban) az alábbi táblázat mutatja.

Kávéfajták	Erő	Savtartalom	Koffeintartalom	Szín	Aroma	Sűrűség	1 kg zöld kávébab ára
Santos 4	6	4,0	2,0	5	8	8	1,40
Rio	10	6,5	1,0	5	4	4	0,92
Victoria	10	5,0	1,5	3	5	4	0,68
Manizales	8	3,0	2,0	9	7	7	1,88
Mexiko	5	3,5	1,5	5	9	5	1,42
Liberica	8	7,0	2,1	5	6	3	0,60

A táblázatban a kávéfajták jelenlegi árai szerepelnek. Míg a Latin-Amerikából származó öt kávéfajta ára fixnek tekinthető, addig az Afrikából beszerezhető Liberica kávéfajta ára bizonytalan.

A MOKKA igazgatója a külkereskedelmi vállalat piackutatóitól azt a szubjektív becslésen alapuló információt kapta, hogy véleményük szerint 70% a valószínűsége annak, hogy a jelenleg 60 centes ár 80 centre fog növekedni, míg 30% a valószínűsége, hogy az ár nem változik.

A forgalomba kerülő kávékeveréknek olyannak kell lennie, amely a következő táblázatban előírt minőségi követelményeknek eleget tesz.

A keverék jellemzői	Min.	Max.
Erő	6	10,0
Savtartalom	0	4,5
Koffeintartalom	0	1,8
Szín	6	10,0
Aroma	4	10,0
Sűrűség	5	10,0

Az adott feltételeket figyelembe véve, a MOKKA a kávéfajták olyan keverékét akarja előállítani, amelynek nyersanyagköltsége (vételára USA dollárban kifejezve) a lehető legkisebb. Írja fel a feladat matematikai modelljét! Nézze meg, hogy a feladat feltételei közül melyek azok, amelyek feleslegesek (a többi feltételből következnek)! Hozza a modellt az

$$\begin{aligned} \mathbf{Ax} &\leqq \mathbf{0}, \\ \mathbf{x} &\geqq \mathbf{0}, \\ \mathbf{c^*x} &\rightarrow \max \end{aligned}$$

képletnek megfelelő alakra!

34. A Kenyeresi Sütőipari Vállalat (továbbiakban vállalat) néhány évvel ezelőtt termelési profilját házitészta-féleségek gyártásának bevezetésével bővítette. A melléktevékenységként folytatott tésztagyártás során hétféle terméket állít elő rendszeresen. Az egyes termékek nyeresége — azonos nyersanyag-összetétel esetén — a munkaigényességtől és a csomagolás módjától függően lényegesen különbözik egymástól. A központi árintézkedések hatására a termékegységre eső realizálható vállalati nyereség (jelentősen) csökkent. Ennek ellensúlyozása érdekében a termékstruktúrában rejlő (és az erőforrások, valamint egyéb feltételek által behatárolt) lehetőségek kiaknázásának a korábbinál nagyobb jelentősége van.

A vállalatvezetés a fentiek szellemében tűzte ki célul a gépkapacitások, a rendelkezésre álló munkaerő és a piaci lehetőségek mint korlátozó tényezők mellett a maximális nyereséget biztosító termelési program megtervezését.

A tésztagyártás folyamata négy technológiai szakaszból áll, éspedig tésztanyújtás, tésztaalakítás (formára vágás), szárítás, csomagolás. A technológiai munkafolyamat jellemzője a kézi munka magas aránya. A tészták alakítása (formára vágás) és a csomagolás teljes egészében kézi erővel történik. Így ezeknek a technológiai szakaszoknak elsősorban a rendelkezésre álló munkaerő szab határt. A tésztanyújtás és a szárítás gépesített. Az alábbi táblázat azt mutatja, hogy a vállalat milyen tésztaféléket készít, ezek 1 tonnája hány Ft nyereséget hoz, mekkora a nyújtógép és a szárítógépek teljesítménye.

Termékfajta	Kalkulált nyereség (Ft/t)	Nyújtógép teljesítménye (kg/óra)	Átlagos szárítási idő (óra)	100 kg termék fajlagos szárítási ideje (óra)
Cérnametélt	410	20	9	5
Rövidmetélt	340	50	12	6,6
Szélesmetélt	320	50	12	6,6
Eperlevél	360	40	15	8,4
Kiskocka	300	50	9	7,5
Nagykocka	280	50	12	10
Csigatészta	430	40	12	10
Szarvacska	350	25	12	10

A vállalatnak egy nyújtógépe van, amely szükség esetén két műszakban is termelhet. A termékeket kétfajta szárítógépen szárítják, éspedig az első négy terméket a hideglevegős szárítón, az utolsó négy terméket pedig a meleglevegős szárítón. (A táblázatban már az ennek megfelelő értékek szerepelnek.) A hidegszárítóban egyszerre 180 kg készterméknek megfelelő tészta helyezhető el (fajtától függetlenül). A szárítószekrényt 24 óra alatt kétszer lehet feltölteni, maximális teljesítménye tehát 360 kg/24 óra, a karbantartás és pihentetés miatt azonban ennek csak a 85%-val szabad számolni. A vállalatnak 1 hideglevegős szekrénye és 2 meleglevegős szekrénye van. Egy meleglevegős szekrénybe egyszerre 120 kg készterméknek megfelelő tészta fér, és ezek is kétszer tölthetők fel 24 óránként. Így a meleglevegős szárítók maximális összkapacitása 480 kg/24 óra, de ugyancsak 85%-os kihasználtsággal szabad számolni.

A tésztafajták alakítása és csomagolása két műszakban történik. Harmadik műszak beindítására a szárítók miatt nincs lehetőség. Egy műszakban legfeljebb 8 fő alakító és 5 fő csomagoló foglalkoztatható a rendelkezésre álló munkaterület alapján. Egy fő hasznos munkaideje napi 8 órai „hasznos" munkával számolva évi 271 munkanap. (Ugyanennyi a gépek hasznos munkanapjainak a száma is.) A tésztafajták alakításánál és csomagolásánál a következő táblázatban felsorolt teljesítményekkel számol a vállalat.

Termékfajta	Alakítás (kg/óra/fő)	Csomagolás (kg/óra/fő)
Cérnametélt	8	8
Rövidmetélt	10	12
Szélesmetélt	11	12
Eperlevél	7	10
Kiskocka	8	10
Nagykocka	10	14
Csigatészta	4	9
Szarvacska	4	8

Bár a tésztafélék kereslete nagy, a kereskedelmi vállalat nagyon ügyel arra, hogy megfelelő választék álljon a fogyasztók rendelkezésére. Ezért az áruátvétellel kapcsolatban — éves szinten — a következő kikötéseket tette:

(1) a metélt tésztaféleségekből (vagyis az első három termékből) összesen annyi tonnát vesz át, mint a két utolsó termékből (csigatésztából és szarvacskából),
(2) kiskockából háromszor annyit kell szállítani, mint nagykockából,
(3) az eperlevél (keresett cikk) mennyiségének legalább annyinak kell lennie, mint a metélt tésztaféleségek fele,
(4) kiskockából és nagykockából összesen legfeljebb annyit vesznek át, mint cérnametéltből,
(5) a cérnametélt mennyisége nem haladhatja meg a rövidmetélt és a szélesmetélt összmennyiségét,
(6) az eperlevél mennyisége nem lehet több, mint a többi hét termék összmennyiségének negyede.

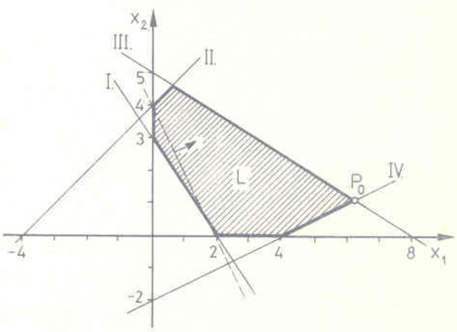
Az adott gépkapacitásoknak, munkaerőkorlátoknak és piaci feltételeknek megfelelően melyik az a matematikai modell, melynek alapján meghatározható a vállalat éves optimális házitésztagyártási terve?

4. A kétváltozós lineáris programozási feladatok grafikus megoldása

A kétismeretlenes lineáris egyenletek megoldáshalmaza — mint tudjuk — egy egyenest, míg a kétismeretlenes lineáris egyenlőtlenségek megoldásai egy félsíkot határoznak meg a síkban. Ez lehetővé teszi hogy a kétváltozós lineáris programozási feladatokat grafikusan megoldjuk. Tekintsük a következő feladatot:

$$\begin{array}{ll} \text{I.} & 3x_1+2x_2 \geqq 6, \\ \text{II.} & -x_1+x_2 \leqq 4, \\ \text{III.} & 5x_1+8x_2 \leqq 40, \\ \text{IV.} & x_1-2x_2 \leqq 4, \\ \text{V.} & x_1, x_2 \geqq 0, \\ & (2x_1+x_2) \to \max. \end{array} \tag{4.1}$$

Ennek a feladatnak minden egyes feltétele egy félsíkot határoz meg, így az egyenlőtlenség-rendszer (feltételrendszer) megoldása ezeknek a zárt félsíkoknak a közös része. Ezt az előzőekben leírt módon határozhatjuk meg. A feltételrendszer megoldáshalmaza a *9. ábrán* látható, melyet be is satíroztunk, és L betűvel jelöltünk. A besatírozott alakzat (egy síkbeli sokszög) minden pontja kielégíti az I—V. feltételeket, tehát az alakzat pontjai a (4.1) feladat egy-egy lehetséges megoldása. A különböző pontokban azonban a célfüggvény értéke más és más lehet. Feladatunk éppen az, hogy meghatározzuk az L halmaznak azt a pontját vagy azon pontjait, amelyeknél a $2x_1+x_2$ célfüggvény maximális értékét veszi fel. E célból írjuk fel a



9. ábra

$$2x_1+x_2 = k \tag{4.2}$$

egyenletet, ahol k tetszőleges konstans értéket jelent! Tudjuk, hogy ha k bármilyen konstans érték is, a (4.2) egyenlet megoldáshalmaza mindig egy síkbeli egyenest határoz meg; *különböző k értékeknél ezek az egyenesek is különbözőek, de egymással mindig párhuzamosak lesznek.*

Helyettesítsünk például a k helyére négyet! Így a (4.2) egyenlet a következő alakú lesz:

$$2x_1+x_2 = 4.$$

Az ennek megfelelő egyenest a *9. ábrán* szaggatott vonallal jelöltük. Ezen szaggatott vonal minden pontjában a célfüggvény értéke 4-gyel lesz egyenlő. Mivel a $2x_1+x_2 = 4$ egyenes metszi az L halmazt, azért van olyan lehetséges megoldása a (4.1) feladatnak, amelynél a célfüggvény értéke néggyel egyenlő. (A szaggatott egyenes mindazon pontjai ilyen megoldást adnak — és csak ezek —, melyek pontjai az L halmaznak is.) Ha az ábrán látható szaggatott vonallal jelölt egyenest önmagával párhuzamosan eltoljuk, akkor olyan egyeneseket kapunk, amelyek különböző k értékekre adják a (4.2) egyenlet megoldását. Nekünk a (4.2) képletnek megfelelő egyenesek közül az kell, amelyiknek még van közös pontja az L-vel, és amelyiknél k maximális értékű. Mivel a szaggatott egyenes a síkot két olyan nyílt félsíkra osztja, amelyek egyikének pontjaira a

$$2x_1+x_2 > 4,$$

a másik félsík pontjaira pedig a

$$2x_1+x_2 < 4$$

egyenlőtlenség áll fenn, azért *egyik irányban önmagával párhuzamosan eltolva az egyenest a k értéke nő, míg a másik irányban eltolva k értéke csökken.* Azt kell megnézni tehát, hogy melyik irányba célszerű eltolni az egyenest. (Ezt többféleképpen meg lehet határozni.) Ha például a k helyére nyolcat írunk, és ábrázoljuk az ennek megfelelő

$$2x_1+x_2 = 8$$

egyenletet, akkor azt látjuk, hogy olyan egyenest kapunk, amely a szaggatott egyenesnek az ábrán látható nyíl irányában történő eltolásával nyerhető. Ha a nyíl irányában egyre messzebb toljuk el önmagával párhuzamosan a szaggatott vonallal jelölt egyenest, akkor a neki megfelelő egyenletben k értéke egyre nagyobb lesz. Látható, hogy legmesszebbre akkor tudjuk eltolni, ha az egyenes átmegy a III., IV. egyenesek metszéspontján, amelyet P_0-val jelöltünk. Ez adja a (4.1) feladat optimális megoldását. Ez a pont az

$$\begin{aligned} 5x_1+8x_2 &= 40, \\ x_1-2x_2 &= 4 \end{aligned}$$

egyenletrendszer megoldása:

$$x_1 = \frac{56}{9}, \quad x_2 = \frac{10}{9}.$$

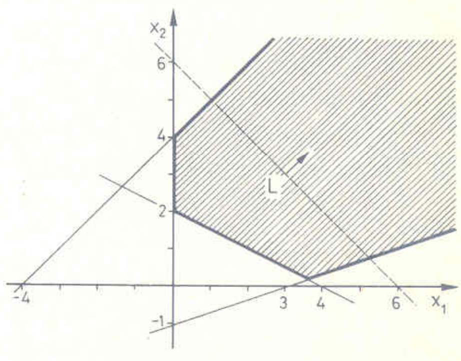
Vagyis az az optimális megoldás, melynél a célfüggvény értéke: $2x_1+x_2 = \frac{122}{9}$. Ezzel a (4.1) feladatot megoldottuk. Az optimális megoldás az L halmaz egyik csúcspontja. A feladatnak csak egy optimális megoldása van.

Ezek után egyszerűen belátható, hogy ha a (4.1) feladatnál az adott feltételrendszeren a $2x_1+x_2$ függvénynek a minimumát keresnénk, akkor az optimális megoldást az I. egyenes és az x_2 tengely metszéspontja adná. Ebben az esetben az optimális megoldás $x_1 = 0$, $x_2 = 3$, és a célfüggvény értéke 3. (Az optimális megoldás most is az L halmaz egyik csúcspontjaként adódott.)

Tekintsük most a következő feladatot:

$$\begin{aligned} x_1-3x_2 &\leqq 3, \\ -x_1+x_2 &\leqq 4, \\ x_1+2x_2 &\geqq 4, \\ x_1, x_2 &\geqq 0, \\ (x_1+x_2) &\rightarrow \max! \end{aligned} \tag{4.3}$$

Oldjuk meg ezt is az előző példához hasonlóan! Először határozzuk meg a lehetséges megoldások halmazát, vagyis az L halmazt. Ezt a feladat egyenlőtlenségei által meghatározott félsíkok közös része adja. A *10. ábrán* láthatók a feladat megoldásához szükséges egyenesek, valamint az L halmaz, melyet besatíroztunk. Látható, hogy *az L halmaz most nem korlátos.*



10. ábra

Az előbbi példa megoldásánál alkalmazott eljáráshoz hasonlóan most is tegyük egyenlővé a célfüggvényt egy tetszőleges konstanssal, majd az így kapott egyenletnek megfelelő egyenest rajzoljuk fel az ábrára. Mi a célfüggvényt hattal tettük egyenlővé, és így a *10. ábrán* látható szaggatott vonal egyenlete:

$$x_1+x_2 = 6.$$

Ennek az egyenesnek van közös része az L halmazzal, amiből következik, hogy a (4.3) feladatnak van (végtelen sok) olyan lehetséges megoldása, amelynél a célfüggvény értéke 6. Egyszerűen belátható, hogyha a szaggatott vonallal jelölt egyenest önmagával párhuzamosan az ábrán látható nyíl irányába egyre messzebb eltoljuk, akkor az így kapott egyenesek $x_1+x_2 = k$ egyenletében a k értéke egyre nagyobb lesz. Az optimális megoldást akkor kapjuk, ha ezt az egyenest a nyíl irányába a lehető legmesszebbre eltoljuk úgy, hogy annak még legyen közös pontja az L halmazzal. Esetünkben azonban *bármely távolság-*

nál még messzebbre eltolható az egyenes úgy, hogy legyen közös része az L halmazzal. Ilyenkor azt mondjuk, hogy a feladatnak *nincs optimális megoldása.* Ennek oka az, hogy a célfüggvény az L halmazon nem korlátos.

Ha viszont a (4.3) feladat feltételrendszerén az ott szereplő célfüggvénynek nem a maximumát, hanem a minimumát keresnénk, akkor a feladatnak már lenne optimális megoldása. Ebben az esetben ugyanis a szaggatott vonalat a nyíl irányával ellentétes irányba kellene a lehető legmesszebbre eltolni úgy, hogy még legyen közös pontja az L halmazzal. Így optimális megoldásként a [0; 2] koordinátájú pontot kapnánk, amely az L halmaz egyik csúcspontja. Az ábráról az is leolvasható, hogy csak egy optimális megoldás van. Vagyis *ha az L halmaz nem korlátos, azért még a célfüggvény lehet korlátos.*

Ha a (4.3) feladat feltételrendszerével a $-x_1+x_2$ célfüggvény maximumát keresnénk, akkor a feladatnak *végtelen sok optimális megoldása lenne;* mivel a $-x_1+x_2=k$ (ahol k tetszőleges konstans mennyiség) egyenletnek megfelelő egyenesek párhuzamosak a $-x_1+x_2=4$ egyenessel, amely az L halmaz egyik határoló egyenese. Az előbbiekben alkalmazott módon belátható, hogy ennek az egyenesnek minden pontjában a $-x_1+x_2$ célfüggvény maximális értéket vesz fel. Ha az L halmaz nem üres és korlátos (tehát konvex poliéder), akkor a feladatnak mindig van optimális megoldása.

Az ismertetett módon minden kétváltozós lineáris programozási feladat megoldható. Grafikus úton azonban nemcsak a kétváltozós feladatok oldhatók meg, hanem bizonyos típusú nemlineáris programozási feladatok is, de ezek megoldásával külön nem foglalkozunk. Az előzőekben ismertettük néhány nemlineáris kétváltozós egyenlőtlenség-rendszer megoldását, melyek alapján az alábbi példák közt felsorolt kétváltozós nemlineáris programozási feladatok is megoldhatók.

Feladatok

35. Oldja meg grafikusan a következő kétváltozós feladatokat!

a)
$$\begin{aligned} 2x_1-5x_2 &\leqq 10,\\ 7x_1+8x_2 &\leqq 56,\\ -5x_1+2x_2 &\leqq 10,\\ x_1, x_2 &\geqq 0,\\ (-x_1+5x_2) &\to \max; \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 3x_1-4x_2 &\leqq 12,\\ 2x_1+3x_2 &\leqq 18,\\ -x_1+x_2 &\leqq 3,\\ x_1+x_2 &\geqq 2,\\ x_1, x_2 &\geqq 0,\\ (5x_1+2x_2) &\to \max; \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} 2x_1+x_2 &\leqq 8,\\ -3x_1+x_2 &\leqq 3,\\ x_1+x_2 &\geqq 1,\\ x_1-x_2 &\leqq 1,\\ x_1, x_2 &\geqq 0,\\ x_2 &\to \max; \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} x_1+3x_2 &\geqq 9,\\ -x_1+x_2 &\leqq 5,\\ 2x_1+3x_2 &\leqq 24,\\ x_1-3x_2 &\leqq 6,\\ x_1, x_2 &\geqq 0,\\ (4x_1+6x_2) &\to \max; \end{aligned}$$

végtelen sok megoldás
z ∥ az egyik oldallal

e)
$$\begin{aligned} 4x_1-5x_2 &\leqq 20,\\ x_1+x_2 &\geqq 3,\\ -5x_1+3x_2 &\leqq 15,\\ x_1, x_2 &\geqq 0,\\ (-2x_1+x_2) &\to \max; \end{aligned}$$

f)
$$\begin{aligned} 2x_1+3x_2 &\geqq 6,\\ 4x_1-x_2 &\geqq 4,\\ -x_1+x_2 &\leqq 3,\\ 2x_1-3x_2 &\leqq 12,\\ x_1, x_2 &\geqq 0,\\ (8x_1+7x_2) &\to \max. \end{aligned}$$

36. Határozza meg, hogy a következő kétváltozós feladatoknak mi lesz az optimális megoldása különböző célfüggvények esetén! (A célfüggvényeket z_1, z_2 és z_3 szimbólumokkal jelöltük.)

a)
$$\begin{aligned} 4x_1+7x_2 &\leqq 56,\\ 5x_1-7x_2 &\leqq 35,\\ -2x_1+x_2 &\leqq 2,\\ -x_1+x_2 &\leqq 4,\\ x_1, x_2 &\geqq 0, \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} z_1 &= (-x_1+5x_2) \to \max;\\ z_2 &= (5x_1-x_2) \to \max;\\ z_3 &= (-3x_1+x_2) \to \max; \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} x_1-x_2 &\leqq 2,\\ x_1+x_2 &\geqq 2,\\ -x_1+x_2 &\leqq 4,\\ x_1+x_2 &\leqq 8,\\ x_1 &\leqq 4,\\ x_1, x_2 &\geqq 0, \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} z_1 &= (7x_1+8x_2) \to \max;\\ z_2 &= (8x_1+7x_2) \to \max;\\ z_3 &= (8x_1+8x_2) \to \max; \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} x_1-4x_2 &\leqq 4,\\ 2x_1-3x_2 &\leqq 12,\\ 2x_1+x_2 &\geqq 3,\\ -3x_1+2x_2 &\leqq 9,\\ x_1, x_2 &\geqq 0,\\ z_1 &= (x_1+3x_2) \to \min;\\ z_2 &= (2x_1+5x_2) \to \max;\\ z_3 &= (-7x_1-5x_2) \to \max; \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} 11x_1-14x_2 &\leqq 77,\\ -12x_1+9x_2 &\leqq 54,\\ 3x_1+x_2 &\geqq 3,\\ 4x_1+7x_2 &\geqq 14,\\ x_1, x_2 &\geqq 0,\\ z_1 &= (8x_1-15x_2) \to \max;\\ z_2 &= (16x_1+28x_2) \to \min;\\ z_3 &= (-4x_1+3x_2) \to \max. \end{aligned}$$

37. Oldja meg, grafikusan a következő lineáris feltételekkel adott nemlineáris programozási feladatokat! (A célfüggvény nemlineáris.) Határozza meg az optimális megoldást abban az esetben is, ha az adott feltételrendszeren az adott célfüggvény minimumának meghatározása lenne a cél!

a)
$$\begin{aligned} x_1+x_2 &\geqq 2,\\ -5x_1+3x_2 &\leqq 15,\\ 5x_1-2x_2 &\leqq 20,\\ 5x_1+3x_2 &\leqq 45,\\ x_1, x_2 &\geqq 0,\\ (x_1^2+x_2^2) &\to \max; \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 2x_1-3x_2 &\leqq 6,\\ 2x_1+x_2 &\geqq 4,\\ -x_1+x_2 &\leqq 2,\\ x_2 &\leqq 7,\\ 7x_1-2x_2 &\leqq 42,\\ x_1, x_2 &\geqq 0,\\ [(x_1-4)^2+(x_2-3)^2] &\to \max; \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} 9x_1-10x_2 &\leqq 9,\\ 9x_1+4x_2 &\leqq 72,\\ x_1+x_2 &\geqq 4,\\ -3x_1+2x_2 &\leqq 6,\\ x_1, x_2 &\geqq 0,\\ (x_1^2+2x_2) &\to \max; \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} 3x_1+2x_2 &\geqq 6,\\ x_1+6x_2 &\geqq 6,\\ x_2 &\leqq 10,\\ -2x_1+x_2 &\leqq 5,\\ x_1, x_2 &\geqq 0,\\ (-2^{x_1}+\ln 2\cdot x_2) &\to \max. \end{aligned}$$

38. Határozza meg grafikusan, hogy a következő nemlineáris egyenlőtlenség-rendszer által meghatározott L halmazon hol veszi fel a maximumát, illetve a minimumát az adott lineáris célfüggvény!

a)
$$\begin{aligned} (x_1-3)^2+(x_2-3)^2 &\leqq 25,\\ x_1^2+x_2^2 &\geqq 4,\\ 3x_1-4x_2 &\leqq 6,\\ -x_1+3x_2 &\leqq 21,\\ x_1, x_2 &\geqq 0, \end{aligned}$$
a célfüggvény: x_1+x_2;

b)
$$\begin{aligned} x_1-x_2^2 &\leqq 1,\\ -x_1^2+x_2 &\leqq 1,\\ -x_1+2x_2 &\leqq 8,\\ (x_1-5)^2+(x_2-4)^2 &\geqq 1,\\ x_1, x_2 &\geqq 0, \end{aligned}$$
a célfüggvény: $-2x_1+4x_2$;

c)
$$\begin{aligned} x_1^2+x_2^2 &\geqq 1,\\ (x_1-4)^2+(x_2-4)^2 &\geqq 2,\\ -x_1+2x_2 &\leqq 8,\\ 2x_1-x_2 &\leqq 8,\\ x_1, x_2 &\geqq 0, \end{aligned}$$
a célfüggvény: x_1-3x_2;

d)
$$\begin{aligned} 8x_1-x_2^2 &\geqq 0,\\ -x_1^2+8x_2 &\geqq 0,\\ -x_1+2x_2 &\geqq 0,\\ -2x_1+3x_2 &\leqq 8,\\ x_1, x_2 &\geqq 0, \end{aligned}$$
a célfüggvény: $-3x_1+2x_2$.

39. Írjon fel olyan feladatot, amelyben a lehetséges megoldások halmazát a (0; 1), (1; 3), (2; 0) és a (3; 1) extremális pontok által meghatározott konvex poliéder pontjai alkotják! Legyen a célfüggvény x_1-x_2! Oldja meg a feladatot $(x_1-x_2)\to\max$ és $(x_1-x_2)\to\min$ esetekben!

40. Rajzolja fel az (1; 2), (5; 1), (7; 3), (5; 6) és a (2; 4) csúcspontok által meghatározott konvex sokszöget, melyről azt tudjuk, hogy ez egy lineáris programozási feladat L halmaza! A feladat célfüggvénye: $(3x_1+bx_2)$, ennek minimumát keressük. A célfüggvényről tudjuk, hogy az optimális értékét az (5; 6) csúcspontban biztosan felveszi.

a) Írja fel az adott L halmaznak megfelelő feladat feltételrendszerét!

b) Határozza meg, hogy a b paraméter milyen értékek között helyezkedik el!

41. Legyen az L halmaz az a konvex ötszög, melynek csúcspontjai a következők: (2; 0), (4; 1), (6; 3), (3; 6), (0; 5)! A programozási feladat célfüggvénye: (ax_1+bx_2) és maximumát keressük. Még azt is tudjuk, hogy a célfüggvény az optimális értékét az L halmaz egyetlen pontjában, éspedig a (6; 3) csúcspontban veszi fel.

a) Írja fel a programozási feladat feltételrendszerét!

b) Határozza meg, hogy az a és b paraméterek milyen értékei esetén veszi fel a célfüggvény a maximális értékét a (6; 3) pontban!

42. Egy konvex poliéder extremális pontjai a következők: (0; 1), (1; 0), (6; 2), (4; 5), (2; 4). Ez a konvex poliéder egy LP-i feladat L halmazának tekinthető. A feladat az (ax_1+bx_2) célfüggvény maximumának elérése.

a) Írja fel az adott konvex poliédernek mint L halmaznak megfelelő feladat feltételrendszerét!

b) Mit tud mondani a célfüggvényben szereplő a és b paraméterek nagyságáról, ha azt tudjuk, hogy az ax_1+bx_2 függvény maximális értékét az L halmaz egyetlen pontjában, a (2; 4) csúcspontban veszi fel, és ez a maximális érték 10?

43. Legyen az L halmaz a (2; 1), (6; 0), (7; 6), (3; 5), (0; 2) csúcspontok által meghatározott konvex ötszög! A feladat ax_1+bx_2 célfüggvénye a maximumát csak a (6; 0) csúcspontban veszi fel, a minimumát pedig csak a (3; 5) csúcspontban.

a) Írja fel az adott L halmaznak megfelelő feladat feltételrendszerét!

b) Határozza meg a célfüggvényben szereplő paraméterek értékét, ha azt tudjuk, hogy a célfüggvény maximális értéke az L halmazon 12!

c) Hogyan alakulna a célfüggvényben szereplő paraméterek értéke, ha a célfüggvény a maximumát a (6; 0) csúcsponton kívül, illetve a minimumát a (3; 5) csúcsponton kívül az L halmaznak még más pontjában is felvehetné? (A paraméterek milyen értéke esetén lenne a feladatnak végtelen sok optimális megoldása?)

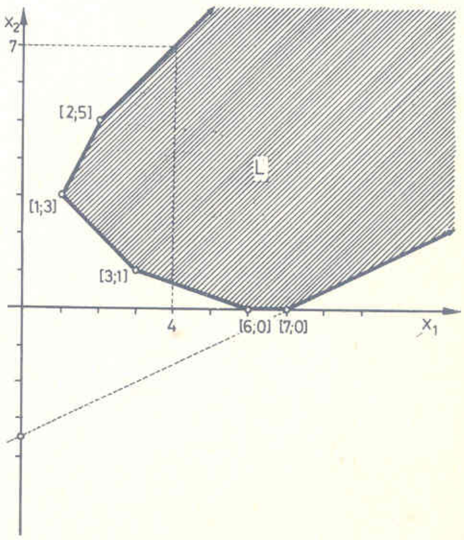
44. Egy feladat L halmazát a *11. ábra* szemlélteti.

a) Írja fel azt a feltételrendszert, amely az L halmazt előállítja! (Kössük ki a változók nemnegativitását is!)

b) Ha a célfüggvény ax_1+bx_2 alakú, akkor a paraméterek milyen értékei esetén kapunk olyan célfüggvényt, amely sem a maximumát, sem a minimumát nem veszi fel az L halmazon?

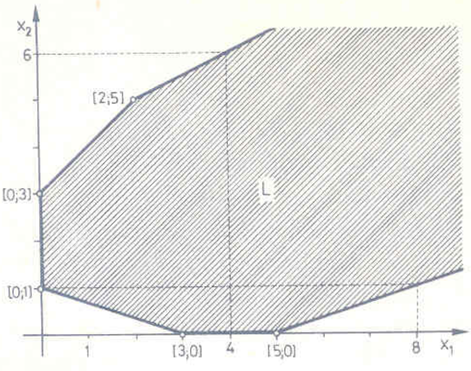
c) Az a és b paraméterek milyen értéke esetén lesz olyan a célfüggvény, amely maximumát felveszi az L halmazon, de a minimumát nem (illetve a minimumát felveszi, de a maximumát nem)?

d) Létezik-e olyan lineáris célfüggvény, amely az adott L halmazon a maximumát is és a minimumát is felveszi?



11. ábra

45.



12. ábra

A *12. ábrán* látható L halmaz pontjait tekintsük egy feladat lehetséges megoldásainak!

a) Írja fel azt a lineáris egyenlőtlen-ség-rendszert, melynek megoldásai az L halmazt állítják elő!

b) Melyek azok a célfüggvények, amelyeknek sem maximuma, sem pedig minimuma nincs az L halmazon?

c) Határozza meg, hogy az ax_1+bx_2 alakú célfüggvény milyen a és b paraméterértékek esetén veszi fel a maximumát csak egyetlen pontban az L halmazon! (A maximumpont koordinátáit is mondja meg!)

d) Adjon meg legalább három olyan célfüggvényt, amelyek mindegyike az L halmaz végtelen sok pontjában minimális értéket vesz fel!

e) Létezik-e olyan lineáris célfüggvény, amely a maximumát a (2; 5) koordinátájú pontban veszi fel, és ez a maximális érték zérus?

f) Milyen paraméterértékek esetén veszi fel a célfüggvény a maximumát az (5; 0) koordinátájú pontban, ha még azt is tudjuk, hogy ez a maximális érték: 10?

46. Legyen $t \leqq 1$ egy pozitív paraméter! Adja meg t azon értékeit, amelyeknél a

$$\begin{aligned} 3x_1+5x_2 &\leqq 40,\\ 5x_1+3x_2 &\leqq 40,\\ -x_1+x_2 &\leqq 5,\\ x_1, x_2 &\geqq 0,\\ [tx_1+(1-t)x_2] &\to \max \end{aligned}$$

feladatnak végtelen sok optimális megoldása van!

$\frac{t}{t-1} = \infty$ - ből $t = 1$

$-\frac{3}{5}; -\frac{5}{3}; 1; 0; \infty$

$0 \leq t \leq 1$

$t = \frac{3}{8}; \frac{5}{8}$

$tx_1 + (1-t)x_2 = c$

$x_2 = \frac{t}{t-1}x_1 - \frac{c}{t-1}$

$m = \frac{t}{t-1}$

47. Egy vegyi üzemben háromféle nyersanyagból két különböző technológia szerint lehet előállítani a készterméket és az eljárás során ezzel együtt kapott két különböző mellékterméket. A nyersanyag-felhasználást, a kihozatal fajlagos értékeit (tonnában) a következő táblázat mutatja a technológiák egyszeri alkalmazása esetén.

$x_2 \to \max$

$x_1 \to \max$

Cél $Z: 18000x_1 + 31500x_2 \rightarrow \max$

		Technológiák I.	Technológiák II.	
Nyersanyagok	A	$1x_1$ +	$3x_2$	≤ 60
	B	4	1	≤ 100
	C	3	4	≤ 100
Késztermék		1	1,5	
Melléktermék I.		0,5	2	
Melléktermék II.		1	2,5	

$x_1, x_2 \geq 0$

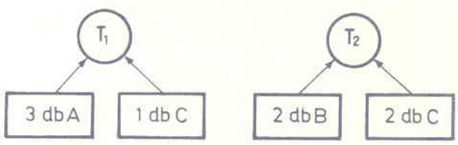
$X_0 = \begin{bmatrix} 12 \\ 16 \end{bmatrix}$

Az első technológiát 1-szer alkalmazva ~~15000 + 1000 + 2000~~ = 18000 Ft a nyereség

$1{,}5 \cdot 15000 + 2 \cdot 2000 + 2{,}5 \cdot 2000 = 31500$

1 tonna késztermék bruttó nyeresége 15 000 Ft, mindkét melléktermék tonnájáé pedig 2000 Ft. A két technológia milyen kombinációját kell alkalmazni, hogy az üzem maximális bruttó nyereséget érjen el, ha az A-ból 60 tonna, B-ből és C-ből egyaránt 100 tonna nyersanyag áll rendelkezésünkre? Írja fel a feladat matematikai modelljét is! (A feladatot grafikusan oldja meg!)

48. Egy üzem kétféle végterméket (T_1-et és T_2-t) készít háromféle alaptermék (A, B és C) összeszerelésével. Az összeszerelési vázlat a *13. ábrán* látható. 1 db T_1 összeszereléséhez 2 óra, 1 db T_2 összeszereléséhez 3 óra szükséges. A szerelési összkapacitás 500 óra. A C alaptermékből legfeljebb 300 darab készíthető (az egyéb, itt figyelembe nem vett, járulékos anyag korlátozott volta miatt). A piackutatók szerint a T_1 és a T_2 termékekből összesen legfeljebb 200 darab értékesíthető, így ezekből ennél többet nem szabad készíteni. 1 db A alaptermékhez 4, 1 db B alaptermékhez 7, 1 db C alaptermékhez 8 egység alapanyag szükséges. Az alapanyag korlátlan mennyiségben beszerezhető, ugyanakkor az üzem raktárában 2000 egység alapanyag van, amelyet mindenképpen fel kell használni. Ha a T_1 termék egységén 2000 Ft, a T_2 termék egységén 3000 Ft a nyereség, akkor mennyit készítsen az üzem ezekből a termékekből, hogy maximális legyen a nyeresége? Írja fel a feladatnak megfelelő matematikai modellt is!



13. ábra

Hogyan változna az optimális program, ha nem volna az a kikötés, hogy a C alaptermékből legfeljebb 300 darab készíthető?

49. Egy termelőszövetkezet vezetősége arról akar dönteni, hogy létesítsen-e egy ipari melléküzemágat, mivel egy fővárosi üzem felajánlotta, hogy rendelkezésükre bocsát két gépet (G_1, G_2), amelyek két különböző alkatrész (A_1, A_2) gyártására alkalmasak. Szerződést azonban csak akkor kötnek, ha a tsz vállalja, hogy naponta legalább

200 db-ot gyárt mindkét alkatrészből. Raktárkapacitás hiánya miatt a heti össztermelés legfeljebb 4000 db lehet. A gépeket legfeljebb napi 8 órában üzemeltethetnék és 5 napos munkahéttel számolhatnak. Az egyes alkatrészek fajlagos megmunkálási ideje az egyes gépeken percben kifejezve:

480 perc

x_1 napi A_1 termelés
x_2 – " – A_2 – " –

Alkatrészek	Gépek G_1	Gépek G_2
A_1	0,5 x_1	0,6 x_1
A_2	0,8 x_2	1,2 x_2
	≤ 480	≤ 480

$8 \cdot 60$ perc

$x_1 \geq 200$
$x_2 \geq 200$
$5x_1 + 5x_2 \leq 4000$
$z = 3x_1 + 4x_2 \to \max$

A fővárosi üzem a termelt alkatrészeket korlátlan mennyiségben átveszi, éspedig az A_1 alkatrész darabját 10 Ft-ért, az A_2 alkatrész darabját 12 Ft-ért. A gépek használatáért a szövetkezetnek nem kell fizetnie. Az előzetes kalkulációk szerint A_1 önköltsége 7 Ft/db, A_2 önköltsége 8 Ft/db.

Írja fel a döntést korlátozó feltételeket matematikai alakban! (~~Egynapi termelésre~~!)

Ábrázolja a lehetséges megoldások halmazát, és határozza meg grafikusan azt a termelési programot, amelyre a tsz napi bruttó nyeresége maximális!

$x_1 = 400$
$x_2 = 200$

Kihasználja-e a tsz a gépek kapacitását ilyen gyártási terv esetén? $0{,}6 \cdot 400 + 1{,}2 \cdot 200 = 480$

Megköti-e a szerződést a tsz a fővárosi üzemmel? igen (fed 200-200 db-ot gyártani!)

Változna-e a tsz bruttó nyeresége, ha nem kötnék ki, hogy mindegyik alkatrészből legalább 200 db-ot kell gyártani naponta? Igen. A_1 napi 800, A_2 0 db. $z = 2400$ Ft

2. gép napi 0 állás
1. gép napi 360 percet megy 75%-os kihasználás

50. Egy üzembe egy tehergépkocsival három helyről szállítják a termeléshez szükséges nyersanyagot. Az I., a II. és a III. nyersanyagraktárak rendre 4, 3 és 1 Ft-ért árusítják a nyersanyagok kilogrammját. A nyersanyagnak a tehergépkocsira való felrakása az I., a II. és a III. nyersanyagraktárban 100 kilogrammonként rendre 1, 4 és 5 percig tart. Az üzem napi nyersanyagszükséglete 1200 kilogramm. Mivel az üzem ezt a nyersanyagot nem raktározhatja, azért ebből mindennap pontosan 1200 kilogrammot kell leszállítani. Hogy a nyersanyag naponta megfelelő időben érkezzék az üzembe, a berakodásnak a három nyersanyagraktárban együtt nem szabad 40 percnél hosszabb ideig tartania. Az egyes nyersanyagraktárakból mekkora mennyiségű anyagot hozzon a tehergépkocsi, hogy a szállított mennyiség ára a legkisebb legyen, ha az egyes raktárak naponta rendre 1000, 800 és 600 kilogrammnál több nyersanyagot nem tudnak adni?

Írja fel a feladatnak megfelelő matematikai modellt, és ábrázolja az L halmazt! Befolyásolja-e a raktárak kapacitása az optimális szállítási tervet? Melyik raktár kapacitásának növelésével csökkenne a szállított mennyiség ára?

$400 \cdot 0{,}5 + 200 \cdot 0{,}8 = 200 + 160 = 360$ percet megy az első gép

$400 \cdot 0{,}6 + 200 \cdot 1{,}2 = 240 + 240 = 480$ – " – – " – második gép

5. A lineáris programozási feladat kanonikus alakja

Az $\mathbf{A}\mathbf{x} \leqq \mathbf{b}$ feltételrendszer minden egyenlőtlenségét alakítsuk át egyenlőséggé oly módon, hogy minden egyenlőtlenség bal oldalához adjunk hozzá egy nemnegatív u_i változót! Így a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n+u_1 &= b_1,\\
a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n+u_2 &= b_2,\\
&\;\;\vdots\\
a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n+u_m &= b_m.
\end{aligned}
$$

Az $u_1, u_2, \ldots, u_m$ változókat eltérésváltozóknak is mondjuk, mivel azt mutatják meg, hogy egy adott termelési program esetén mennyivel kisebb a megfelelő egyenlőtlenség bal oldala, mint a jobb oldala. Ha ismerjük az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ változók értékét, akkor ismerjük az $u_1, u_2, \ldots, u_m$ változók értékét is. Elsődleges (primál) célunk azonban mindig az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ változók meghatározása, azért ezeket *primál változóknak* nevezzük.

Ha bevezetjük az

$$\mathbf{u}^* = [u_1;\ u_2;\ \ldots;\ u_m]$$

jelölést, akkor a lineáris programozás feladatának általános alakja a következő, vele ekvivalens ún. *kanonikus alakba* írható fel:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{E}\mathbf{u} &= \mathbf{b},\\
\mathbf{x} &\geqq \mathbf{0},\\
\mathbf{u} &\geqq \mathbf{0},\\
\mathbf{c}^*\mathbf{x} &\to \max.
\end{aligned}
$$

Összevontabb formában:

$$
\begin{aligned}
[\mathbf{A}, \mathbf{E}]\begin{bmatrix}\mathbf{x}\\ \mathbf{u}\end{bmatrix} &= \mathbf{b},\\
\begin{bmatrix}\mathbf{x}\\ \mathbf{u}\end{bmatrix} &\geqq \mathbf{0},\\
\mathbf{c}^*\mathbf{x} &\to \max.
\end{aligned}
$$

Ha $\begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}$ megoldása a kanonikus alakú feladatnak, akkor az **x** megoldása a vele ekvivalens általános alakú feladatnak, és megfordítva, ha **x** megoldása az általános alakú feladatnak, akkor az $\begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}$ megoldása a megfelelő kanonikus alakú feladatnak. Az **x** és az $\begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}$ vektorok között tehát kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés létesíthető.

Látható az is, hogy minden lineáris programozási feladat eltérésváltozók bevezetésével átalakítható egy olyan vele ekvivalens feladattá, melynek feltételrendszerében csak egyenletek vannak. *Elegendő tehát vizsgálódásainkat az*

$$\begin{aligned} \mathbf{Ax} &= \mathbf{b}, \\ \mathbf{x} &\geqq \mathbf{0}, \\ \mathbf{c}^*\mathbf{x} &\to \max \end{aligned}$$

alakú feladatra elvégezni. Ilyen alakú feladathoz kétféle úton juthatunk: vagy eleve egyenletek formájában tudjuk megadni feltételeinket, vagy egy nem kanonikus alakú feladatot alakítunk át kanonikus alakúra. Ha a feladat feltételei között egyenlőtlenségek is vannak, akkor az **x** vektor tartalmazza az ún. eltérésváltozókat is, és ebben az esetben a $\mathbf{c}^*$ vektor azon komponenseit zérussal kell pótolni, melyek a $\mathbf{c}^*\mathbf{x}$ skaláris szorzatban az eltérésváltozókkal szorzódnak.

A kanonikus alakú feladattal kapcsolatban vezessük be a következő alapvető fogalmakat!

Megoldásnak nevezünk minden olyan **x** vektort, melyre

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}.$$

Megvalósítható (más néven lehetséges) megoldásnak nevezünk minden olyan **x** *vektort, mely eleget tesz az* $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$; $\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}$ *feltételeknek.* Eszerint a megvalósítható megoldások halmaza:

$$L = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geqq \mathbf{0}\}.$$

Ha a feladatnak nincs megvalósítható megoldása, akkor az L üres halmaz. Ilyen eset fordul elő akkor, ha a feltételrendszeren belül ellentmondás van. (Feltételrendszeren az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ és $\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}$ formulával megadott feltételek összességét értjük.)

Optimális megoldásnak nevezünk minden olyan $\mathbf{x}_0$ *vektort, mely egyrészt eleme az* L *halmaznak (tehát lehetséges megoldás), másrészt* $\mathbf{c}^*\mathbf{x}_0$ *maximális a* $\mathbf{c}^*\mathbf{x}$ *értékek között, ahol* $\mathbf{x} \in L$.

Vagyis az optimális megoldások halmaza:

$$L_0 = \{\mathbf{x}_0 \mid \mathbf{x}_0 \in L, \mathbf{c}^*\mathbf{x}_0 = \max \mathbf{c}^*\mathbf{x}, \mathbf{x} \in L\}.$$

A megvalósítható megoldások között fontosságuknál fogva meg kell említeni az ún. bázismegoldásokat. A bázismegoldás fogalma szoros kapcsolatban van a feladat feltételrendszerének együtthatómátrixával, az **A** mátrixszal. Az **A** mátrix rangja megegyezik oszlopvektorrendszerének a rangjával. Tegyük fel, hogy

$$\rho(\mathbf{A}) = r.$$

Most már definiálhatjuk a bázismegoldást.

Bázismegoldásnak nevezünk minden olyan $\mathbf{x}_B$ *vektort, mely eleme az L halmaznak, és az* $\mathbf{A}\mathbf{x}_B = \mathbf{b}$ *egyenletben az* **A** *mátrixnak az* $\mathbf{x}_B$ *vektor pozitív komponenseihez tartozó oszlopvektorai lineárisan független rendszert alkotnak.* Ha egy bázismegoldásnak r-nél kevesebb pozitív komponense van, akkor azt *degenerált bázismegoldásnak* mondjuk.

Ha egy megvalósítható bázismegoldásnak r darab pozitív komponense van, akkor azt *nemdegenerált bázismegoldásnak* nevezzük. Ha egy adott lineáris programozási feladat feltételrendszerében csak egyenlőtlenségek vannak, akkor a neki megfelelő kanonikus alakban szereplő **A** mátrix rangja megegyezik a feltételek számával, vagyis az **A** mátrix sorainak a számával. Ebben az esetben ugyanis az **A** mátrix mindig tartalmaz egy sorainak számával megegyező rendű **E** mátrixot. Az **E** mátrix rangja és rendje — mint tudjuk — mindig egyenlő.

Feladatok

51. Írja fel a következő feladatok kanonikus alakját (az eltérésváltozók segítségével)!

a)
$$\begin{aligned}
4x_1+5x_2+x_3+x_4 &\leqq 24,\\
x_1+3x_2+4x_3 &\leqq 20,\\
x_1+3x_3+2x_4 &\leqq 18,\\
x_1, x_2, x_3, x_4 &\geqq 0,\\
(8x_1+6x_2+4x_3+7x_4) &\rightarrow \max;
\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned}
2x_1+x_2-3x_3+x_4 &\leqq 10,\\
x_1-x_2+2x_3+2x_4 &\leqq 12,\\
x_1+x_2+x_4 &\geqq 8,\\
x_1, x_2, x_3, x_4 &\geqq 0,\\
(4x_1+9x_2-x_3+x_4) &\rightarrow \max;
\end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned}
x_1-x_2+x_3-x_4 &\leqq 12,\\
x_1+2x_2+x_3+3x_4 &\geqq 18,\\
x_1+x_2+x_4 &= 8,\\
2x_1+x_3 &\geqq 8,\\
x_1, x_2, x_3, x_4 &\geqq 0,\\
(5x_1-3x_2-6x_3+x_4) &\rightarrow \min;
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
d)\quad & x_1+3x_2-x_3-x_4-x_5 \geqq -2,\\
& x_1 \qquad +2x_3+x_4+2x_5 \geqq 10,\\
& -x_1+x_2+x_3-x_4+x_5 = 8,\\
& \quad -3x_2-2x_3+x_4-4x_5 = -54,\\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geqq 0,\\
& (2x_1-3x_2-4x_3+x_4-x_5) \to \min.
\end{aligned}
$$

(Célszerű felírni először a feladatok általános alakját, aztán abból kiindulva a kanonikus alakot.)

52. Írja fel a következő feladatok kanonikus alakját mátrixaritmetikai jelölésekkel!

$$
\begin{aligned}
a)\quad & x_1-x_2+x_3-x_4 \leqq 10,\\
& \quad x_2+2x_3+x_4 \leqq 16,\\
& x_1+x_2 \qquad +2x_4 \leqq 12,\\
& x_1, x_2, x_3, x_4 \geqq 0,\\
& (4x_1+x_2+x_3+5x_4) \to \max;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 10 \\ 16 \\ 12 \end{bmatrix}
$$

(3×7) $\quad$ (7×1) $\quad$ (3×1)

$\underline{x} \geqq \underline{0}$

$\underline{u} \geqq \underline{0}$

$$
z = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}^{*} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \to \max.
$$

$$
\begin{aligned}
b)\quad & 3x_1+2x_2+x_3-x_4 \leqq 20,\\
& \quad x_1+x_2 \qquad +x_4 \geqq 10,\\
& 2x_1 \qquad +2x_3+x_4 \leqq 16,\\
& x_1, x_2, x_3, x_4 \geqq 0,\\
& (3x_1-x_2-x_3+x_4) \to \min;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
c)\quad & 3x_1-x_2+x_3-x_4 \leqq 15,\\
& \quad x_1+x_2 \qquad +x_4 = 10,\\
& 2x_1 \qquad -x_3+3x_4 = 16,\\
& 3x_1-x_2+x_3+x_4 \geqq 8,\\
& x_1, x_2, x_3, x_4 \geqq 0,\\
& (5x_1+6x_2+x_4) \to \min;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
d)\quad & x_1+2x_2+x_3+x_4+x_5 \leqq 50,\\
& 2x_1+x_2-x_3-x_4+3x_5 \geqq 30,\\
& x_1 \qquad +x_4+x_5 = 12,\\
& 2x_1+3x_2+\quad 9x_4+x_5 \geqq 42,\\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geqq 0,\\
& (3x_1+5x_2-2x_3-x_4+x_5) \to \max.
\end{aligned}
$$

6. Az optimális megoldások elhelyezkedése a megvalósítható megoldások halmazán

A megvalósítható megoldások L halmazát az előző pontban definiáltuk a következőképpen:

$$L = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geqq \mathbf{0}\}.$$

Ha az $\mathbf{A}$ mátrix $(m \times n)$ típusú, akkor az L halmaz azokat az n elemű nemnegatív vektorokat tartalmazza, amelyek eleget tesznek m darab lineáris egyenletnek. Az $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ részletesebben is írható:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1^*\mathbf{x} &= b_1, \\ \mathbf{a}_2^*\mathbf{x} &= b_2, \\ &\;\;\vdots \\ \mathbf{a}_m^*\mathbf{x} &= b_m. \end{aligned}$$

Látható, hogy minden egyenlet egy hipersíkot állít elő ($\mathbf{a}_i$ az i-edik egyenlet együtthatóiból képzett vektor, és egyben normálvektora az $\mathbf{a}_i^*\mathbf{x} = b_i$ hipersíknak). A nemnegativitási feltételek pedig az n dimenziós térben n zárt félteret határoznak meg. *A lehetséges megoldások halmaza az egyenleteknek megfelelő m hipersíknak a nemnegatív síknegyedben fekvő közös része.*

Mivel a hipersíkok is, és az itt szereplő (a változók nemnegativitási feltételét kielégítő) félsíkok is zárt és konvex halmazt alkotnak, azért ezek közös része is (amint azt az előzőekben beláttuk) zárt és konvex halmaz. Ezek alapján kimondható a következő tétel:

1. Tétel: A kanonikus alakú lineáris programozási feladat megvalósítható megoldásainak halmaza zárt és konvex.

A továbbiakban a bázismegoldások, valamint az optimális megoldások szempontjából fontos szerepet játszanak az L halmaz csúcspontjai vagy extremális pontjai. Ezzel kapcsolatos a következő két tétel.

2. Tétel: Ha az $\mathbf{x}$ *bázismegoldása a kanonikus alakú feladatnak, akkor a neki megfelelő pont az L halmaz extremális pontja.*

3. Tétel: Ha $\mathbf{x}$ *csúcspontja az L halmaznak, akkor az*

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

egyenletben az $\mathbf{A}$ *mátrixnak az* $\mathbf{x}$ *pozitív komponenseihez tartozó oszlopvektorai lineárisan független rendszert alkotnak.*

Tegyük fel, hogy a feltételrendszer együtthatómátrixának a rangja m, azaz $\rho(\mathbf{A}) = m$, és az $\mathbf{A}$ $(m \times n)$ típusú.

Ebben az esetben az előbbi két tételt a következő összevont formában mondhatjuk ki: *az* $\mathbf{x}$ *pont akkor és csak akkor csúcspontja az L-nek, ha a pozitív komponenseihez tartozó vektorok a*

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{a}_i = \mathbf{b}$$

kifejezésben lineárisan függetlenek.

A fenti tételekből következik, hogy az L halmaz csúcspontjainak a száma véges, mert az $\mathbf{A}$ mátrix oszlopai közül csak véges számú egymástól különböző lineárisan független vektort lehet kiválasztani. (Ezek számának felső korlátját kombinatorikus úton pontosan meg lehet határozni.) L zárt és konvex halmaz, ezért a megvalósítható megoldások halmaza:

a) üres (ha a feltételrendszer ellentmondásos),

b) konvex poliedrikus halmaz vagy konvex poliéder (ha az L korlátos).

A gyakorlatban általában biztosítható a lehetséges megoldások létezése és azok korlátos volta, ezért az L halmaz általában konvex poliéder.

A kétváltozós lineáris programozási feladatokat — mint láttuk — grafikusan is meg lehet oldani. Ezek megoldásánál azt tapasztaltuk, hogy az optimális megoldást mindig az L halmaz határán találtuk, amennyiben létezett. Sőt azt is tapasztaltuk, hogy akkor mindig létezett optimális megoldás, amikor az L halmaz konvex poliéder volt. Ebben az esetben az optimális megoldást az L halmaz valamelyik csúcspontjában megtaláltuk. Csak akkor fordult elő, hogy nem létezett optimális megoldás, amikor vagy üres volt az L, vagy pedig nem volt korlátos.

Jogosan vetődik fel a kérdés, vajon a többváltozós lineáris programozási feladatoknál is, az optimális megoldást az L halmaz határán vagy belsejében kell keresnünk? Egyszerű okoskodással rájöhetünk arra, hogy az L halmaz belső pontjai nem szolgáltathatnak optimális megoldást. Ha ugyanis pl. $\mathbf{x}_0$ belső pontja az L-nek, és ez optimális megoldást szolgáltat, azaz

$$\mathbf{c}^*\mathbf{x}_0 = z_0 = \max \mathbf{c}^*\mathbf{x} \qquad \text{minden } \mathbf{x} \in L \text{ pontra,}$$

akkor a $\mathbf{c}^*\mathbf{x} = z$ egy hipersíkot határoz meg. Ez a hipersík tartalmazza az $\mathbf{x}_0$ pontot. A $\mathbf{c}^*\mathbf{x} = z$ hipersík az euklideszi teret két nyílt féltérre bontja, melyek közül az egyik minden $\mathbf{y}$ pontjára

$$\mathbf{c}^*\mathbf{y} > \mathbf{c}^*\mathbf{x} = z.$$

Ebben a nyílt féltérben az L halmaznak biztosan van pontja, mivel az $\mathbf{x}_0$ belső pontja az L-nek, és így van az $\mathbf{x}_0$ pontnak olyan $\varepsilon > 0$ sugarú környezete, melynek van közös része a $\mathbf{c}^*\mathbf{x} > z$ féltérrel. Így az $\mathbf{x}_0$ *belső pont nem adhat optimális megoldást.* Vagyis egy lineáris programozási feladat optimális megoldása nem helyezkedhet el az L halmaz belsejében. Többváltozós lineáris programozási feladatok optimális megoldását is az L halmaz határán kell keresnünk. Azt is láttuk a kétváltozós feladatoknál, hogy amennyiben volt a feladatnak optimális megoldása, akkor az L halmaznak legalább egy csúcspontja is optimális megoldást adott. Ez a többváltozós feladatoknál is igaz. Ezt mondja ki a következő tétel.

4. Tétel: Ha a $z = \mathbf{c}^*\mathbf{x}$ célfüggvény az L halmaz valamelyik pontjában felveszi maximumát, akkor létezik az L-ben olyan csúcspont, ahol a célfüggvény szintén maximális értékű.

Ha az L halmaz üres halmaz, akkor nincs lehetséges megoldás, és így optimális megoldásról sem beszélhetünk. Láttuk, hogy ha az L nem üres halmaz, akkor olyan zárt, konvex halmaz, amely vagy korlátos, vagy nem korlátos. Mindkét esetben az L halmaznak véges sok csúcspontja van. A tétel értelmében elegendő tehát ezekben a csúcspontokban keresni az optimális megoldást, melyet meg is találunk, amennyiben tudjuk, hogy a feladatnak van optimális megoldása.

Bizonyítható, hogy ha az L nem üres halmaz, és a célfüggvény az L halmaz egyetlen csúcspontjában sem veszi fel a maximális értékét, akkor az L halmaznak nincsen olyan pontja, amelyben a célfüggvény értéke maximális volna.

Előfordulhat viszont, hogy a célfüggvény több csúcspontban is felveszi a maximális értékét. Találkoztunk ilyen feladattal a kétváltozós feladatok megoldása során is. Ott azt láttuk, hogy ha a célfüggvény az L halmaz két csúcspontjában is felvette a maximumát, akkor a két pontot összekötő szakasz minden pontjában maximális értéket vett fel. Vajon mi ennek a megfelelője a többváltozós feladatok esetében? Ezt mondja ki a következő tétel.

5. Tétel: Amennyiben a célfüggvény több csúcspontban is felveszi a maximumát, akkor ezeknek a csúcsoknak minden konvex lineáris kombinációjaként előállítható pontban is maximális értéket vesz fel.

Az ismertetett tételek alapján a következőket mondhatjuk: az optimális megoldásokat elég a bázismegoldások között keresni, ami geometriailag azt jelenti, hogy elég az L halmaznak megfelelő konvex halmaz csúcspontjain vizsgálni a célfüggvény alakulását. Ha a feladatnak csak egy optimális megoldása van, akkor ezt az L halmaz valamelyik csúcspontja adja. Ha több csúcspontban is optimális értéket vesz fel a célfüggvény, akkor ezek konvex lineáris kombinációi is optimális megoldásokat adnak, vagyis a feladatnak végtelen sok optimális megoldása van. Ha az L halmaz nem korlátos, akkor előfordulhat, hogy csak egy csúcspontban veszi fel a célfüggvény a maximumát, és a feladatnak mégis végtelen sok megoldása van. (Természetesen a többi optimális megoldást az L halmaz bizonyos határpontjai adják.)

Ezek alapján egy feladatot megoldhatnánk úgy is, hogy meghatároznánk az L halmaz összes csúcspontját, és utána megnéznénk ezekben a pontokban a célfüggvény értékét. Amelyik extremális pontban a célfüggvény maximális értékű lenne, az a pont adná az optimális megoldást. Amennyiben több csúcspontban is maximális értékű lenne a célfüggvény, úgy ezek konvex lineáris kombinációi adnák az összes megoldást. A feladat ily módon történő megoldása azonban nagyon sok időt venne igénybe, mivel az L halmaznak — bár mindig véges számú— de nagyon sok csúcspontja lehet. Ez a módszer különben is csak abban az esetben vezetne eredményre, ha a feladatnak van optimális megoldása, vagy azt tudjuk, hogy L konvex poliéder. Ha az L nem korlátos, akkor előfordulhat, hogy az a csúcspont, melyben a célfüggvény a csúcspontok közül a maximális értéket veszi fel „hamis optimumot” ad. A valóságban esetleg a feladatnak nincs is optimuma.

Nekünk tehát olyan algoritmusra van szükségünk, melynél nem kell az összes bázismegoldást (az L halmaz összes csúcspontját) meghatározni, hanem csak ezek egy részét, és így eljutunk az optimális megoldáshoz. Ezt a célt valósítja meg az ún. *szimplex módszer,* amely jelenleg a lineáris programozási feladatok megoldásának leghatékonyabb módszere.

A szimplex módszer lényege abban áll, hogy kiindul egy megvalósítható bázismegoldásból, vagyis megvizsgálja a célfüggvény értékét az L halmaz valamelyik csúcspontjában. Erről a bázismegoldásról egy olyan új bázismegoldásra tér át, amely egyrészt az előző bázistól csak egy vektorban különbözik, másrészt pedig ennek a bázisnak megfelelő pontban a célfüggvény értéke általában nagyobb lesz, mint az előző pontban, de semmiképpen sem kisebb. Az eljárás mindaddig folytatódik, amíg az optimális bázismegoldás elő nem áll; vagy amíg ki nem derül, hogy nincs optimális megoldás, azaz a célfüggvény nem korlátos a lehetséges megoldások halmazán.

Egy adott bázisból egy olyan új bázisra, amely az adott bázistól csak egy vektorban különbözik, elemi bázistranszformációval tudunk áttérni. Ez geometriailag azt jelenti, hogy az L halmaz egyik csúcspontjából egy „szomszédos” csúcspontra térünk át.

Feladatok

53. Mondjon olyan vektorokat, melyek lehetséges megoldásai, de nem bázismegoldásai az alábbi feladat kanonikus alakjának! Mondja meg, hogy ezeknek a vektoroknak az adott feladat L halmazának mely pontjai felelnek meg! Határozza meg ezekben a pontokban a célfüggvény értékét!

a)
$$\begin{aligned} x_1-2x_2+x_3-x_4 &\leqq 16,\\ x_2+x_3+x_4 &\leqq 14,\\ 3x_1+2x_2+x_3 &\leqq 22,\\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geqq 0,\\ (7x_1+6x_2+5x_3+4x_4) &\to \max; \end{aligned}$$

minden olyan lehetséges megoldás, melyben a pozitív elemek száma több mint a sorok száma, biztosan nem bázismegoldás!

Pl. $x_1=3$, $x_2=1$, $x_3=1$, $x_4=1$, $u_1=15$, $u_2=11$, $u_3=10$

b)
$$\begin{aligned} 5x_1+x_2+x_3+x_4 &\leqq 20,\\ x_1+x_3+x_4 &= 10,\\ 2x_1-x_2-x_3+x_4 &\leqq 12,\\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geqq 0,\\ (4x_1-x_2-x_3+x_4) &\to \min; \end{aligned}$$

$x_1=2$, $x_2=1$, $x_3=3$, $x_4=5$

c)
$$\begin{aligned} 3x_1+x_2+x_4 &\geqq 8,\\ 2x_1+x_3+x_4 &= 6,\\ x_1+2x_2+2x_3 &\geqq 9,\\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geqq 0,\\ (4x_1+7x_2+9x_3+x_4) &\to \max; \end{aligned}$$

d) $3x_1+x_2 \qquad + x_4 \leqq 10,$

$2x_1+x_2+x_3- x_4 = 8,$

$x_1+x_2-x_3+3x_4 \geqq 14,$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \qquad \geqq 0,$

$(5x_1+x_2+2x_3+3x_4) \to \min.$

54. Határozza meg, hogy az $\mathbf{y}_1$, $\mathbf{y}_2$, $\mathbf{y}_3$, $\mathbf{y}_4$, $\mathbf{y}_5$ vektorok közül melyek bázismegoldásai az alábbi feladatnak! (Azt kell megnézni, hogy az $\mathbf{y}_i$ vektorok pozitív komponenseihez tartozó oszlopvektorai az együtthatómátrixnak, vagyis az $[\mathbf{A}, \mathbf{E}]$ mátrixnak lineárisan független vagy függő rendszert alkotnak-e. Célszerű először felírni a feladat kanonikus alakját.) Az adott $\mathbf{y}_i$ vektoroknál a szaggatott vonal feletti blokk rendre az $\mathbf{x}$ vektor elemeit, az alatta levő blokk pedig rendre az $\mathbf{u}$ vektor elemeit tartalmazza.

a) $2x_1- x_2- x_3 \leqq 2,$

$x_1+ x_2+ x_3 \leqq 10,$

$3x_1+2x_2+4x_3 \leqq 24,$

$x_1, x_2, x_3 \qquad \geqq 0,$

$(5x_1+4x_2+3x_3) \to \max;$

$2x_1-x_2-x_3+u_1 = 2$

$x_1+x_2+x_3+u_2 = 10$

$3x_1+2x_2+4x_3+u_3 = 24$

$x_i \geq 0 \quad u_i \geq 0$

$z = 5x_1+4x_2+3x_3 \to \max$

$\mathbf{y}_1$ megoldás

$a_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad a_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \quad e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

megállapítható volna elemi bázistranszformációval, hogy ki. a függetlenek, tehát $\mathbf{y}_1$ bázismegoldás!

bázism. — bázism. — nem bázism. — bázism. — nem bázism.

$$\mathbf{y}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \\ 2 \\ \hdashline 12 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hdashline 2 \\ 10 \\ 24 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ 0 \\ \hdashline 6 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}_4 = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 0 \\ \hdashline 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}_5 = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 0 \\ \hdashline 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

4 pozitív komponens!

b) $3x_1+x_2-x_3+2x_4 \leqq 16,$

$2x_1 \qquad +x_3+2x_4 \leqq 15,$

$4x_1+x_2+x_3+ x_4 \leqq 16,$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \qquad \geqq 0,$

$(8x_1+6x_2-x_3+2x_4) \to \max;$

$$\mathbf{y}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ 3 \\ 6 \\ \hdashline 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 15 \\ 0 \\ \hdashline 30 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 6 \\ \hdashline 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 16 \\ 0 \\ 0 \\ \hdashline 0 \\ 15 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 15 \\ 1 \\ 0 \\ \hdashline 2 \\ 14 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

c) $$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &\leqq 15, \\ x_1 \quad + x_3 + x_4 &= 8, \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 &\leqq 0, \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geqq 0, \\ (7x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4) &\to \max; \end{aligned}$$

$$\mathbf{y}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 8 \\ \hdashline 7 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}_2 = \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ \hdashline 0 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ 0 \\ 8 \\ \hdashline 0 \\ 0 \\ 29 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 23 \\ 8 \\ 0 \\ \hdashline 0 \\ 0 \\ 53 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}_5 = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 53 \\ 25 \\ 11 \\ 0 \\ \hdashline 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

d) $$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 10, \\ 2x_1 \quad + 3x_3 - x_4 &\leqq 30, \\ 4x_1 \quad + x_3 + x_4 &\leqq 12, \\ -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &\geqq 6, \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geqq 0, \\ (x_1 - 3x_2 - 4x_3 + x_4) &\to \min; \end{aligned}$$

$$\mathbf{y}_1 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 \\ 38 \\ 21 \\ 3 \\ \hdashline 0 \\ 0 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}_2 = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 6 \\ 190 \\ 96 \\ 0 \\ \hdashline 0 \\ 0 \\ 0 \\ 28 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 11 \\ \hdashline 0 \\ 36 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}_4 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 \\ 20 \\ 11 \\ 11 \\ \hdashline 0 \\ 38 \\ 2 \\ 8 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 20 \\ 10 \\ 0 \\ \hdashline 0 \\ 0 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

55. Határozza meg az alábbi feladatok L halmazának legalább három extremális pontját és az extremális pontokban a célfüggvény értékét! Mondja meg, hogy a csúcspontoknak megfelelő megoldások közül a feladat szempontjából melyik a legkedvezőbb! (Mivel az $\mathbf{x}$ és $\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix}$ vektorok között kölcsönös és egyértelmű megfeleltetés létesíthető, azért az L halmaz csúcspontjai úgy is meghatározhatók, hogy felírjuk az adott feladat kanonikus alakját, és ezen kanonikus alak egyenleteiből álló egyenletrendszer nemnegatív bázismegoldásait keressük. Ezek a bázismegoldások adják a kanonikus alak lehetséges megoldásainak, illetve az ezeknek megfelelő $\mathbf{x}$ vektorok az adott feladat L halmazának extremális pontjait.)

a) $2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \leqq 10,$
$x_2 - x_3 + 4x_4 \leqq 12,$
$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leqq 8,$
$x_1, x_2, x_3, x_4 \geqq 0,$
$(7x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 9x_4) \rightarrow \max;$

b) $x_1 - x_2 - x_3 + x_4 \leqq 9,$
$x_1 - x_3 + 2x_4 \leqq 10,$
$x_2 + x_3 + x_4 = 6,$
$x_1, x_2, x_3, x_4 \geqq 0,$
$(8x_1 + 5x_2 + 8x_3 + 10x_4) \rightarrow \max;$

c) $x_1 + x_2 + 2x_4 \leqq 12,$
$x_2 + x_3 + x_4 = 8,$
$2x_1 + x_3 + 3x_4 \geqq 10,$
$x_1, x_2, x_3, x_4 \geqq 0,$
$(-7x_1 + 11x_2 - 6x_3 + 9x_4) \rightarrow \min;$

d) $x_1 + x_3 + x_5 \geqq 6,$
$x_2 + x_4 - x_5 = 8,$
$x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \geqq 14,$
$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geqq 0,$
$(8x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 5x_4 + 3x_5) \rightarrow \min.$

56. Határozza meg az alábbi feladatok L halmazának (vagy a megfelelő kanonikus alakú feladatok L halmazának) csúcspontjait! Számítsa ki ezekben az extremális pontokban a célfüggvény értékét, és ennek alapján írja fel a feladat optimális megoldását! Azt is mondja meg, hogy maximálisan hány extremális pontja lehetne az L halmaznak! Az adott feladatok mindegyike olyan, hogy az L halmaz konvex poliéder, tehát létezik optimális megoldás. (A feladat megoldható úgy, hogy először felírjuk a feladat kanonikus alakját, aztán ennek meghatározzuk az összes nemnegatív bázismegoldását. Ezek adják a kanonikus alak — valamint ezek megfelelői a feladat — L halmazának csúcspontjait. Ezek ismeretében a célfüggvényértékek, valamint az optimális megoldás már könnyen meghatározható. A nemnegatív bázismegoldások meghatározására különböző módszerek vannak.)

a) $x_1 + 2x_2 + x_3 \leqq 14,$
$2x_1 + x_2 + x_3 \leqq 16,$
$3x_1 + 4x_2 + x_3 \leqq 20,$
$x_1, x_2, x_3 \geqq 0,$
$(8x_1 + 7x_2 + 2x_3) \rightarrow \max;$

b) $x_1+x_2-x_3 \leqq 8,$
$x_1+x_2+x_3 \leqq 14,$
$2x_1-x_2-x_3 \leqq 10,$
$x_1, x_2, x_3 \geqq 0,$
$(8x_1+11x_2+3x_3) \to \max;$

c) $-x_1 \quad +2x_3-x_4 \leqq 4,$
$-x_2+x_3-x_4 \leqq 2,$
$x_1+x_2+x_3+x_4 = 8,$
$x_1, x_2, x_3, x_4 \geqq 0,$
$(5x_1-4x_2-7x_3+2x_4) \to \min;$

d) $x_1+x_2 \quad +2x_4 = 20,$
$x_2+x_3 \leqq 16,$
$x_1 \quad +x_3+x_4 = 18,$
$x_1, x_2, x_3, x_4 \geqq 0,$
$(7x_1+5x_2+2x_3+6x_4) \to \max.$

T

57. Tekintse az alábbi feladatokat, és határozza meg, hogy az adott **x** vektor bázismegoldása-e,
optimális megoldása-e
vagy csak lehetséges megoldása
a feladatnak!

a) $x_1+x_2+2x_3 \leqq 4,$
$2x_1+3x_2+x_3 \leqq 10,$
$x_1, x_2, x_3 \geqq 0,$
$(3x_1+4x_2+3x_3) \to \max,$

$$\mathbf{x}^* = \frac{1}{10}[15; 23; 1];$$

– A 3 pozitív komponens miatt biztos nem bázismegoldás
$\underline{x}^*$ két opt. bázismegoldás lin. komb.-ja így opt. megoldás és
$\underline{x}^*$ nem bázispont, $Z(\underline{x}^*) = \max.$ megegyezik a opt. bázispontok célf. értékével

$\underline{x} = \frac{3}{4}\underline{y}_3 + \frac{1}{4}\underline{y}_4$

b) $3x_1-x_2+x_3 \leqq 10,$
$x_1+x_2+2x_3 \leqq 14,$
$x_1, x_2, x_3 \geqq 0,$
$(7x_1+2x_2+4x_3) \to \max,$
$\mathbf{x}^* = [6; 8; 0];$

c) $x_1-x_2 \leqq 8,$
$x_2-x_3 = 6,$
$x_1+x_2+x_3 \leqq 12,$
$x_1, x_2, x_3 \geqq 0,$
$(2x_1+6x_2-2x_3) \to \min,$
$\mathbf{x}^* = [0; 9; 3];$

d)
$$\begin{aligned} x_1+2x_2 \quad -x_4 &\leqq 17, \\ x_2+x_3+x_4 &\leqq 19, \\ -x_1+x_2-x_3+x_4 &= 16, \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geqq 0, \\ (6x_1+4x_2+2x_3+7x_4) &\to \min, \\ \mathbf{x}^* &= [0; 9; 0; 7]. \end{aligned}$$

58. Az $\mathbf{Ax} \leqq \mathbf{b}$,
$$\mathbf{x} \geqq \mathbf{0},$$
$$\mathbf{c}^*\mathbf{x} \to \max$$
feladat néhány nemnegatív bázismegoldása a következő:

$$\mathbf{y}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ \hline 1 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ \hline 0 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}_4 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \hline 0 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

A bázismegoldásokhoz tartozó célfüggvényértékek rendre:

$$z(\mathbf{x}_1) = 0, \quad z(\mathbf{x}_2) = 4, \quad z(\mathbf{x}_3) = 5, \quad z(\mathbf{x}_4) = \frac{3}{2}.$$

a) Írja fel az eredeti feladatot, ha a célfüggvény maximumának elérése a cél!
b) Felsoroltunk-e minden nemnegatív bázismegoldást?
c) A felsorolt bázismegoldások között szerepel-e az optimális megoldás?

7. Az általános alakú lineáris programozási feladat megoldásával kapcsolatos tételek

Az előzőkben láttuk, hogy egy kanonikus alakú feladat optimális megoldásait (amennyiben léteznek) a megvalósítható megoldások halmazának extremális pontjai között kell keresnünk, melyeket a feltételi egyenletrendszer nemnegatív bázismegoldásai szolgáltatják. A feladat lényege tehát az, hogy megtaláljuk azt vagy azokat a megvalósítható bázismegoldásokat, amelyekhez az optimális megoldások tartoznak.

Induljunk ki a következő általános alakú feladatból:

$$\begin{aligned} \mathbf{Ax} &\leqq \mathbf{b}, \\ \mathbf{x} &\geqq \mathbf{0}, \\ \mathbf{c}^*\mathbf{x} &\to \max! \end{aligned}$$

Nemnegatív eltérésváltozók bevezetésével térjünk át a feladat kanonikus alakjára:

$$\begin{aligned} \mathbf{Ax}+\mathbf{Eu} &= \mathbf{b}, \\ \mathbf{x} \geqq \mathbf{0},\quad \mathbf{u} &\geqq \mathbf{0}, \\ \mathbf{c}^*\mathbf{x} &\to \max! \end{aligned}$$

Minden általános alakú maximumfeladathoz hozzárendelünk egy minimumfeladatot, mégpedig az

$$\begin{aligned} \mathbf{Ax} &\leqq \mathbf{b}, \\ \mathbf{x} &\geqq \mathbf{0}, \\ \mathbf{c}^*\mathbf{x} &\to \max \end{aligned}$$

feladathoz tartozó minimumfeladat:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}^*\mathbf{A} &\geqq \mathbf{c}^*, \\ \mathbf{y}^* &\geqq \mathbf{0}, \\ \mathbf{y}^*\mathbf{b} &\to \min. \end{aligned}$$

Az ily módon felírt minimumfeladatról azt mondjuk, hogy ez a fenti maximumfeladat duálja (duálisa) és fordítva: a fenti maximumfeladat a felírt minimumfeladat duálja. Ily módon a primál és duál feladat együtt mindig egy ún. *primál—duál feladatpárt* alkot.

Például írjuk fel az

$$\begin{aligned}
5x_1+3x_2-4x_3+\ x_4 &\leqq \ 6,\\
x_1 \qquad +5x_3+2x_4 &\leqq 15,\\
x_2+\ x_3+3x_4 &\leqq 10,\\
x_1, x_2, x_3, x_4 \qquad &\geqq \ 0,\\
(7x_1+5x_2+4x_3+6x_4) &\to \max
\end{aligned}$$

maximumfeladat duálisát! A definíció szerint ez a következő:

$$\begin{aligned}
5y_1+\ y_2 \qquad &\geqq 7,\\
3y_1 \qquad +y_3 &\geqq 5,\\
-4y_1+5y_2+\ y_3 &\geqq 4,\\
y_1+2y_2+3y_3 &\geqq 6,\\
y_1, y_2, y_3 \qquad &\geqq 0,\\
(6y_1+15y_2+10y_3) &\to \min.
\end{aligned}$$

Látható tehát, hogy a duál feladat feltételrendszerének együtthatómátrixa megegyezik a primál feladat együtthatómátrixának transzponáltjával, bármelyik feladatot is tekintjük primálnak, illetve duálnak. A primál és duál feladatban — amint látható — szerepet cserél a **b** és **c** vektor. Ha a primál feladatban a **b** kapacitásvektorként, a **c** pedig árvektorként szerepel, akkor a duális feladatban a **c** vektor játssza a kapacitást, míg a **b** vektor az ár szerepét. Ha a maximumfeladatot tekintjük primál feladatnak, akkor ebben az ún. primál változók, a duális feladatban pedig a duál változók szerepelnek elsődleges változóként.

A továbbiakban vizsgáljuk az általános alakú feladatból származtatott kanonikus alakú feladatot, melynek együtthatómátrixa: [**A**, **E**]! Az **E** mátrix oszlopvektorai az eltérésváltozókhoz tartoznak. Így az eltérésváltozókhoz tartozó oszlopvektorok triviális bázisát adják az [**A**, **E**] mátrix által meghatározott lineáris térnek. A lineáris algebrából jól ismert az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer megoldásának induló táblázata. Ehhez hasonlóan foglaljuk össze az alábbi táblázatban a feladat adatait, amelyet a továbbiakban a feladat ún. *induló szimplex táblázatának* nevezünk.

	$\mathbf{x}^*$	
$\mathbf{u}$	$\mathbf{A}$	$\mathbf{b}$
	$\mathbf{c}^*$	

Látható, hogy az induló szimplex táblázat nemcsak a primál, hanem egyúttal a duál feladat összes adatát is tartalmazza. Amennyiben a minimumfeladatot tekintenénk elsődlegesnek (primálnak) és a maximumfeladatot másodlagosnak (duálnak), akkor a táblázatot csak transzponálni kellene. A továbbiakban be fogjuk látni, hogy ugyanannak az eljárásnak a keretében alakul ki mind a primál, mind a duál feladat megoldása. Ha megtaláltuk a primál feladat optimumát, akkor már duálisának optimuma is ismert.

Mindenesetre az látható, hogy az induló szimplex táblázat a kanonikus alakú feladat feltételrendszerének egy bázisát adja (ha $\mathbf{b} \geqq \mathbf{0}$, akkor egy bázis megoldását adja magának a feladatnak).

A kiinduló táblázat felfogható mind a primál, mind a duál feladat szempontjából úgy, hogy van egy induló bázisunk. A primál feladat bázisát az eltérésváltozókhoz tartozó m darab m dimenziós egységvektor, a duális feladat bázisát ezzel szemben az itt duális szerepet betöltő (primál) változókhoz tartozó n dimenziós egységvektorok alkotják. Itt is ugyanúgy, mint a Lineáris algebra című tárgy tanulása folyamán sok helyütt, az egységvektorokat nem tüntetjük fel a táblázatban helykímélés miatt. Minden további bázismegoldáshoz elemi bázistranszformáció útján jutunk el oly módon, hogy a primál és eltérésváltozókat megfelelő módon egymással kicseréljük.

Tegyük fel, hogy elemi bázistranszformációk sorozatával sikerült a primál feladat bázisát alkotó első k vektort (jelen esetben a k egységvektort) kicserélni az első k primál változónak megfelelő vektorral. Az így kapott táblázatot mátrixalgebrai jelölésekkel, áttekinthető formában csak akkor tudjuk felírni, ha magát az induló táblázatot az alábbi particionált formában adjuk meg.

	$\mathbf{x}_1^*$	$\mathbf{x}_2^*$	
$\mathbf{u}_1$	$\mathbf{A}_{11}$	$\mathbf{A}_{12}$	$\mathbf{b}_1$
$\mathbf{u}_2$	$\mathbf{A}_{21}$	$\mathbf{A}_{22}$	$\mathbf{b}_2$
	$\mathbf{c}_1^*$	$\mathbf{c}_2^*$	0

Az $\mathbf{A}_{11}$ mátrixblokk — a transzformációnak megfelelően — $(k \times k)$ típusú, és nemszinguláris, mert a jelzett transzformáció csak így hajtható végre.

A táblázatban szereplő többi mátrixblokk és vektor típusa ennek megfelelően értendő. A táblázat jobb alsó sarkába zérust írtunk. Ennek jelentésével a későbbiekben foglalkozunk. Most már fel tudjuk írni a transzformáció következtében megváltozott szimplex táblázatot:

	$\mathbf{u}_1^*$	$\mathbf{x}_2^*$	
$\mathbf{x}_1$	$\mathbf{A}_{11}^{-1}$	$\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}$	$\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{b}_1$
$\mathbf{u}_2$	$-\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}$	$\mathbf{A}_{22}-\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}$	$\mathbf{b}_2-\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{b}_1$
	$-\mathbf{c}_1^*\mathbf{A}_{11}^{-1}$	$\mathbf{c}_2^*-\mathbf{c}_1^*\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}$	$-\mathbf{c}_1^*\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{b}_1$

Ezen táblázat alapján kimondhatjuk a következő három tételt:

1. Tétel: Ha a táblázat utolsó oszlopában nincs negatív elem, akkor az

$$x_0 = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1}b_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

vektor a primál feladatnak egy megvalósítható megoldása, amely mellett az első k feltétel egyenlőség formájában teljesül, a többi feltételnél a bal oldal éppen annyival kevesebb a jobb oldalon álló mennyiségnél, mint amennyit a $b_2 - A_{21}A_{11}^{-1}b_1$ *vektor megfelelő komponense mutat.*

Ezen x_0 megvalósítható megoldásnál a célfüggvény értéke:

$$c^*x_0 = [c_1^*, c_2^*] \begin{bmatrix} A_{11}^{-1}b_1 \\ 0 \end{bmatrix} = c_1^*A_{11}^{-1}b_1.$$

Ez a kifejezés is megtalálható a táblázatban, mégpedig a táblázat jobb alsó sarkában ellenkező előjellel. Most már azt is megmondhatjuk, hogy az induló táblázatban a jobb alsó sarokba azért írtunk zérust, mert ehhez a táblázathoz tartozó lehetséges programnál a célfüggvény értéke zérus. Látható tehát, hogyha egy szimplex táblázat utolsó oszlopában nincs negatív elem, akkor az a primál feladatnak mindig egy megvalósítható megoldását adja, melyet az — lineáris algebrában tanult — egyenletrendszerek megoldásához hasonlóan olvasunk le a táblázatról. Azon x_i változók értéke, melyeknek megfelelő oszlopvektorok bekerültek a bázisba, megegyezik a táblázat utolsó oszlopának i-edik elemével, míg a többi változó értéke zérus.

2. Tétel: Ha a táblázat utolsó sorában nincs pozitív elem, akkor az

$$u_0^* = [c_1^*A_{11}^{-1}, 0^*]$$

vektor a duális feladat egy megvalósítható megoldása, amely mellett az első k feltétel egyenlőség formájában teljesül, míg a többi egyenlőtlenségben a bal oldal éppen annyival nagyobb a jobb oldalnál, mint amennyit a $c_1^*A_{11}^{-1}A_{12} - c_2^*$ *vektor megfelelő komponense mutat.*

A táblázathoz tartozó lehetséges duális megoldás itt is leolvasható. A bázisból kikerült u_j eltérésváltozók, jelen esetben duális változók értéke megegyezik a táblázat utolsó sorának j-edik elemének ellenkező előjellel vett értékével, míg a többi duális változó értéke zérus. Ehhez az u_0 lehetséges megoldáshoz tartozó célfüggvényérték:

$$u_0^*b = [c_1^*A_{11}^{-1}; 0^*] \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = c_1^*A_{11}^{-1}b_1.$$

3. Tétel: Ha a táblázat utolsó oszlopában nincs negatív elem, és az utolsó sorában nincs pozitív elem, akkor az

$$x_0 = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1}b_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

a primál és az

$$u_0 = [c_1^* A_{11}^{-1}, 0^*]$$

a duál feladat optimális megoldása, melyekhez tartozó célfüggvényértékek azonosak, azaz

$$\max c^*x = \min u^*b = c_1^* A_{11}^{-1} b_1.$$

A most ismertetett 3 tétel alapján belátható az ún. *dualitási tétel: Ha a primál és duál feladatok közül valamelyiknek van megvalósítható megoldása és véges optimuma, akkor a másiknak is van megvalósítható megoldása és véges optimuma, továbbá a két feladat optimumértékei egyenlők.*

Az eddigiek kiegészítésére még két tételt mondunk ki:

4. Tétel: Amennyiben mind a primál, mind a duál feladatnak van megvalósítható megoldása, és a megoldásoknak megfelelő célfüggvényérték z, illetve w, akkor

$$z \leqq w.$$

Vagyis a primál feladat bármely lehetséges megoldásához tartozó célfüggvényérték kisebb vagy egyenlő a megfelelő duál feladat bármely lehetséges megoldásához tartozó célfüggvényértéknél.

5. Tétel: Ha a primál feladat célfüggvénye nem korlátos az L halmazon, akkor a duál feladatnak nincs megvalósítható megoldása.

Az 5. tétel nem megfordítható. Ha ugyanis a feladatpár egyik oldalának nincs megvalósítható megoldása, akkor abból még nem következik, hogy a duálisának van, de a célfüggvény ott nem korlátos. Előfordulhat ugyanis olyan eset, hogy sem a primál, sem a duál feladatnak nincs megvalósítható megoldása.

Még egy megjegyzést kell tennünk, amely a duális feladattal kapcsolatos. Az eddigiek során a duális feladatpárt az általános alakú feladattal kapcsolatban fogalmaztuk meg. Vagyis, ha egy feladat duálisát fel akartuk írni, akkor azt először általános alakú feladattá kellett átalakítani, amennyiben eredetileg nem ilyen alakú volt. Utána duálisának felírása már nem okozott nehézséget. Ezzel a módszerrel minden feladat duálisa felírható. Előnye abban van, hogy a duális változókra is ki kell kötni a nem negativitási feltételt. Van azonban hátránya is. Nézzük ugyanis a következő lineáris programozási feladatot:

$$\begin{aligned} Ax &= b, \\ x &\geqq 0, \\ c^*x &\rightarrow \max! \end{aligned}$$

Írjuk fel ennek a feladatnak a duálisát! Először általános alakú feladattá kell alakítanunk:

$$\begin{aligned} \mathbf{Ax} &\leqq \mathbf{b}, \\ -\mathbf{Ax} &\leqq -\mathbf{b}, \\ \mathbf{x} &\geqq \mathbf{0}, \\ \mathbf{c}^*\mathbf{x} &\to \max. \end{aligned}$$

Most már fel tudjuk írni a duálisát:

$$[\mathbf{u}_1^*, \mathbf{u}_2^*] \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ -\mathbf{A} \end{bmatrix} \geqq \mathbf{c}^*,$$

$$\mathbf{u}_1^* \geqq \mathbf{0}^*, \mathbf{u}_2^* \geqq \mathbf{0}^*,$$

$$[\mathbf{u}_1^*, \mathbf{u}_2^*] \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ -\mathbf{b} \end{bmatrix} \to \min.$$

Ez a feladat így is írható:

$$\begin{aligned} [\mathbf{u}_1^* - \mathbf{u}_2^*]\, \mathbf{A} &\geqq \mathbf{c}^*, \\ \mathbf{u}_1^* \geqq \mathbf{0}^*, \mathbf{u}_2^* &\geqq \mathbf{0}^*, \\ [\mathbf{u}_1^* - \mathbf{u}_2^*]\, \mathbf{b} &\to \min. \end{aligned}$$

(Vegyük észre, hogy $\mathbf{u}_1$ és $\mathbf{u}_2$ elemeinek a száma egyenlő!) Ha az $\mathbf{A}(m \times n)$ típusú mátrix, akkor a duális feladatban $2m$ számú duális változó szerepel. Vezessük be az $\mathbf{u}^* = \mathbf{u}_1^* - \mathbf{u}_2^*$ jelölést! Ezzel a duális feladat a következő alakú lesz:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^*\mathbf{A} &\geqq \mathbf{c}^*, \\ \mathbf{u}^*\mathbf{b} &\to \min. \end{aligned}$$

Itt azonban az $\mathbf{u}^*$ vektorról nem köthetjük ki a nemnegativitást. A duális feladat ily módon való felírásánál az előny az, hogy ebben a formában csak m számú duális változó szerepel, és így a feltételrendszer mérete csökken.

Feladatok

59. Írja fel a következő feladatok duálisát:

a)
$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &\leqq 16, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 &\leqq 28, \\ x_2 + x_3 - 2x_4 &\leqq 4, \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geqq 0, \\ (4x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 3x_4) &\to \max; \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} x_1+x_2-x_3-x_4+4x_5 &\leqq 20,\\ 2x_2+x_3+x_4 &\leqq 14,\\ 2x_1-x_2+3x_4+x_5 &\leqq 16,\\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geqq 0,\\ (10x_1-3x_2-4x_3+x_4-7x_5) &\to \min; \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} x_1+4x_2+x_3+2x_4 &\leqq 8,\\ x_1+x_3+x_4 &\geqq 3, \quad |\cdot -1\\ 5x_1+x_2+x_4 &\leqq 16,\\ 2x_2+3x_3+4x_4 &\geqq 20, \quad |\cdot -1\\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geqq 0,\\ (3x_1+9x_2+5x_4) &\to \max; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_1-u_2+5u_3 &\geqq 3\\ 4u_1+u_3-2u_4 &\geqq 9\\ u_1-u_2-3u_4 &\geqq 0\\ 2u_1-u_2+u_3-4u_4 &\geqq 5\\ u_i &\geqq 0\\ W=8u_1-3u_2+16u_3-20u_4 &\to \min \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} 3x_1-x_2-x_3+2x_4+x_5 &\leqq 10,\\ x_1+x_2+x_3+x_4 &\leqq 10,\\ 3x_2+5x_3+2x_4-x_5 &\geqq 12,\\ x_1+2x_3-x_4+x_5 &\geqq 6,\\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geqq 0,\\ (4x_1-3x_2+x_3-x_4-5x_5) &\to \min. \end{aligned}$$

60. Írja fel az alábbi feladatok duálisát úgy, hogy mindegyik duális változóra fennálljon a nemnegativitási feltétel! (Mindegyik egyenletet két egyenlőtlenséggel kell helyettesíteni.)

a)
$$\begin{aligned} 3x_1-2x_2+x_3+x_4 &\leqq 9,\\ x_1+x_2-x_3+2x_4 &= 8,\\ x_2+3x_3+5x_4 &\leqq 30,\\ 4x_1+x_3 &= 12,\\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geqq 0,\\ (4x_1+7x_2+3x_3+9x_4) &\to \max; \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 5x_1+x_2-x_3+2x_4+3x_5 &\leqq 24,\\ x_2+2x_3+x_5 &= 9,\\ x_1+x_3+3x_4-x_5 &= 10,\\ 3x_1-x_2+x_4+2x_5 &\geqq 12,\\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geqq 0,\\ (9x_1+x_2+2x_3-3x_4+2x_5) &\to \max; \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} x_1+5x_2+x_3+4x_4 &\geqq 10, \quad |\cdot -1\\ x_2+2x_3+x_4 &= 7, \quad \leqq \;\; \geqq \cdot -1\\ x_1+2x_2+x_3-x_4 &= 8, \quad -1) -\\ 3x_1+2x_3+x_4 &\geqq 12, \quad |\cdot -1\\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geqq 0,\\ (4x_1-x_2+7x_3+11x_4) &\to \min; \quad | \;\; |\cdot -1 \end{aligned}$$

$$
\begin{array}{ll}
d) & x_1 + x_3 + 2x_4 = 12, \\
 & x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 = 8, \\
 & 3x_1 + x_2 + x_4 - 4x_5 = 10, \\
 & x_1 + 2x_3 - x_4 + 3x_5 = 11, \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geqq 0, \\
 & (4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 7x_4 + 2x_5) \to \max.
\end{array}
$$

61. Írja fel az alábbi feladatok duálisát úgy, hogy az egyenlőségi feltételeknek megfelelő duális változók előjelkötetlenek legyenek!

$$
\begin{array}{ll}
a) & x_1 + 5x_2 + x_3 + 2x_4 \leqq 22, \\
 & 3x_1 + x_2 - x_4 = 10, \\
 & x_2 + x_3 + x_4 = 8, \\
 & x_1 - x_3 + 3x_4 \leqq 16, \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4 \geqq 0, \\
 & (7x_1 + 12x_2 + x_3 + 4x_4) \to \max;
\end{array}
$$

$u_1 \geqq 0 \quad u_4 \geqq 0$

$u_1 + 3u_2 + u_4 \geqq 7$

$5u_1 + u_2 + u_3 \geqq 12$

$u_1 + u_3 - u_4 \geqq 1$

$2u_1 - u_2 + u_3 + 3u_4 \geqq 4$

$w = 22u_1 + 10u_2 + 8u_3 + 16u_4 \to \min$

$\to$ előbb $-x_2 - 2x_3 - x_4 - 2x_5 \leqq -7$

$u_1 \geqq 0, u_3 \geqq 0$

$$
\begin{array}{ll}
b) & x_2 + 2x_3 + x_4 + 2x_5 \geqq 7, \\
 & x_1 + x_2 - x_5 = 6, \\
 & x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 \leqq 14, \\
 & x_2 + 2x_4 + x_5 = 8, \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geqq 0, \\
 & (6x_1 + 4x_3 + 3x_5) \to \max;
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
c) & x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 \geqq 6, \\
 & 5x_1 + x_2 + x_4 \geqq 10, \\
 & x_1 + x_3 + 3x_4 = 10, \\
 & x_2 + 2x_3 + x_4 = 12, \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4 \geqq 0, \\
 & (7x_1 - 12x_2 - 8x_3 + x_4) \to \min;
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
d) & x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5 = 15, \\
 & x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 = 13, \\
 & 3x_1 + 5x_2 + x_3 - x_5 = 11, \\
 & 4x_1 - x_2 + 2x_4 + x_5 = 15, \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geqq 0, \\
 & (2x_1 - 6x_2 + x_3 - 11x_4 - 5x_5) \to \min.
\end{array}
$$

mind előjelkötetlen!

$| \cdot (-1).$

62. Készítse el a következő feladatok induló szimplex táblázatát! (Célszerű először a feladatokat általános alakra hozni.)

a)
$$\begin{aligned}
x_1-x_2+2x_3+3x_4 &\leqq 16,\\
3x_1+x_2+x_3 &\leqq 14,\\
x_2+3x_3+x_4 &\leqq 16,\\
x_1+x_4 &\leqq 8,\\
x_1, x_2, x_3, x_4 &\geqq 0,\\
(4x_1-2x_2+5x_3+11x_4) &\to \max;
\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned}
x_1+2x_3+x_4+3x_5 &\leqq 17,\\
x_2+x_3+5x_4+x_5 &\geqq 11,\\
x_1-x_2+x_4+x_5 &\leqq 10,\\
x_1+3x_2+4x_3-x_5 &\geqq 12,\\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geqq 0,\\
(9x_1+3x_2+4x_3+x_4-x_5) &\to \max;
\end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned}
2x_1+x_3-2x_4 &\leqq 7,\\
3x_2+x_3+x_4 &= 8,\\
x_1+x_2+x_4 &\geqq 3,\\
x_1+4x_2-x_3 &\geqq 5,\\
x_1, x_2, x_3, x_4 &\geqq 0,\\
(x_1-8x_2-9x_3+x_4) &\to \min;
\end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned}
x_1+x_2 &= 2,\\
x_2+2x_3 &= 3,\\
x_3+4x_4 &= 5,\\
x_1+x_4+3x_5 &= 5,\\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geqq 0,\\
(3x_1-7x_2+x_3+4x_5) &\to \min.
\end{aligned}$$

63. Írja fel az alábbi feladatok induló szimplex táblázatát! Aztán végezze el — a particionált táblázat alapján — azt a bázistranszformációt, melynek következtében az u_1 és u_2 duális változók helyet cserélnek az x_1 és x_2 primál változókkal. Az így kapott táblázat utolsó sorának és utolsó oszlopának elemei alapján válaszoljon az alábbi kérdésekre. Mutatja-e a táblázat

(1) a primál feladat egy lehetséges bázismegoldását,
(2) a duál feladat egy lehetséges bázismegoldását,
(3) a primál (és duál) feladat optimális megoldását,
(4) a lehetséges bázismegoldáshoz tartozó célfüggvényértéket?

a)
$$\begin{aligned}
x_1-x_2+x_4 &\leqq 4,\\
x_2+2x_3+x_4 &\leqq 5,\\
-x_1+3x_2+x_3 &\leqq 6,\\
2x_2-x_3+3x_4 &\leqq 13,\\
x_1, x_2, x_3, x_4 &\geqq 0,\\
(7x_1+9x_2+11x_3+6x_4) &\to \max;
\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned}
x_1 \quad\; +3x_3+2x_4+x_5 &\leqq 8,\\
-x_1+x_2+x_3-x_4+x_5 &\leqq 1,\\
-x_2+2x_3+x_4+x_5 &\leqq 21,\\
-x_1+3x_2+x_3+x_4+2x_5 &\leqq 20,\\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geqq 0,\\
(12x_1+17x_2+7x_3+8x_4+x_5) &\to \max;
\end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned}
x_1 \quad +2x_3+x_4 &\leqq 2,\\
3x_1+2x_2 \quad +x_4 &\leqq 10,\\
-x_2-x_3+x_4 &\leqq 8,\\
x_2+x_3 &\leqq 4,\\
x_1, x_2, x_3, x_4 &\geqq 0,\\
(3x_1+9x_2+7x_3+4x_4) &\to \max;
\end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned}
x_1+x_2-x_3+x_4 &\leqq 7,\\
2x_1+x_2 \quad +3x_4+x_5 &\leqq 18,\\
-x_1 \quad -x_3+x_4 &\leqq 6,\\
x_1-x_2+2x_3+x_4+4x_5 &\leqq 14,\\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geqq 0,\\
(9x_1+5x_2-3x_3+4x_4+3x_5) &\to \max.
\end{aligned}$$

l. 64. Írja fel az alábbi feladatok induló szimplex táblázatát, majd végezze el az előírt elemi bázistranszformációkat. Azután az így kapott táblázat alapján feleljen a következő kérdésekre! Mutatja-e a táblázat

(1) a primál feladat egy lehetséges bázismegoldását,
(2) a duál feladat egy lehetséges bázismegoldását,
(3) a primál (és a duál) feladat optimális megoldását,
(4) mekkora a lehetséges bázismegoldáshoz tartozó célfüggvényérték?
(5) A primál feladat mely feltételei teljesülnek egyenlőség formájában a táblázat által mutatott lehetséges bázismegoldás esetén?
(6) A duál feladat mely feltételei nem teljesülnek egyenlőség formájában a táblázat által mutatott lehetséges bázismegoldás esetén?
(7) Ha a táblázat lehetséges bázismegoldást mutat, mely azonban még nem optimális megoldás, akkor adjon alsó becslést a primál feladat és felső becslést a duál feladat optimális megoldásához tartozó célfüggvényértékre!

a)
$$\begin{aligned}
3x_1-5x_2+x_3 \qquad &\leqq 30,\\
x_2+2x_3+x_4 \quad &\leqq 20,\\
x_1 \qquad -x_4+x_5 &\leqq 10,\\
x_1-2x_2+x_3 \quad -x_5 &\leqq 10,\\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geqq 0,\\
(8x_1+7x_2+9x_3+6x_4+8x_5) &\to \max.
\end{aligned}$$

c) 1) $\underline{x}^* = [6, 3, 2, 0, 0]$
$\underline{A}\underline{x} \leq \underline{b}$
2) —
3) —
4) $92 = 9\cdot 6 + 8\cdot 3 + 7\cdot 2 + 6\cdot 0 + 5\cdot 0$
5) első három
6) —
7) $z_0 > 92$

A következő elemi bázistranszformációkat végezze el:
az 1. lépésben u_3 helyett cserél az x_1-gyel,
a 2. lépésben u_4 helyet cserél az x_4-gyel,
a 3. lépésben u_1 helyet cserél az x_2-vel.

b)
$$\begin{aligned}
2x_1 \quad +x_3 \quad +x_5 &\leqq 10,\\
x_1+x_2+x_3 &\leqq 4,\\
x_2+x_3+x_4 &\leqq 7,\\
-x_4+x_5 &\leqq 6,\\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geqq 0,\\
(9x_1+5x_2+4x_3+3x_4+x_5) &\to \max.
\end{aligned}$$

A következő elemi bázistranszformációkat végezze el:
az 1. lépésben u_2 helyet cserél az x_1-gyel,
a 2. lépésben u_3 helyet cserél az x_4-gyel,
a 3. lépésben u_4 helyet cserél az x_5-tel.

c)
$$\begin{aligned}
x_1 \quad -x_3 \quad +x_5 &\leqq 4,\\
x_2+x_3+x_4 &\leqq 5,\\
x_1 \quad -x_4+x_5 &\geqq 6,\\
x_2+x_3+x_4-x_5 &\leqq 7,\\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geqq 0,\\
(9x_1+8x_2+7x_3+6x_4+5x_5) &\to \max.
\end{aligned}$$

A következő elemi bázistranszformációkat végezze el:
az 1. lépésben u_1 helyet cserél az x_1-gyel,
a 2. lépésben u_2 helyet cserél az x_2-vel,
a 3. lépésben u_3 helyet cserél az x_3-mal.

d)
$$\begin{aligned}
x_1 \quad +x_3+x_4 &\leqq 4,\\
x_1+x_2+x_3 &\leqq 6,\\
x_2-x_3 \quad +x_5 &\leqq 5,\\
-x_1+x_2 \quad +x_4+x_5 &\leqq 4,\\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geqq 0,\\
(7x_1+12x_2+5x_3+9x_4+10x_5) &\to \max.
\end{aligned}$$

A következő elemi bázistranszformációkat végezze el:
az 1. lépésben u_1 helyet cserél az x_1-gyel,
a 2. lépésben u_4 helyet cserél az x_5-tel,
a 3. lépésben u_2 helyet cserél az x_2-vel,
a 4. lépésben u_3 helyet cserél az x_3-mal.

65. Mit tud mondani az

a) L konvex poliéder
b) $L = \{0\}$
c) L üres halmaz
d) $L = \{0\}$

$$\mathbf{Ax} \leqq \mathbf{b},$$
$$\mathbf{x} \geqq \mathbf{0},$$
$$\mathbf{c^*x} \to \max,$$
$$\text{ahol } \mathbf{A} > \mathbf{0}$$

feladat L halmazáról, ha

a) $\mathbf{b} > \mathbf{0}$, *b)* $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, *c)* $\mathbf{b} < \mathbf{0}$, *d)* $\mathbf{b} \geqq \mathbf{0}$, de a $\mathbf{b}$ vektornak legalább egy eleme zérus.

66. Tekintsük az

$$\mathbf{Ax} \leqq \mathbf{b}$$

lineáris egyenlőtlenség-rendszert! Tegyük fel, hogy ennek megoldásai egy konvex poliédert határoznak meg, melyet jelöljünk L-lel, azaz $L = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{Ax} \leqq \mathbf{b}\}$! Bizonyítsa be, hogy van olyan $\mathbf{y} \geqq \mathbf{0}$ vektor, mely kielégíti az $\mathbf{y^*A} = \mathbf{1^*}$ egyenletet!

67. Bizonyítsa be, hogy ha az

A duális: $y^*A \geq c^*$, $y^* \geq 0^*$, $y^*b \to \min$

$$\mathbf{Ax} \leqq \mathbf{b},$$
$$\mathbf{x} \geqq \mathbf{0},$$
$$\mathbf{c^*x} \to \max$$

és mindig van megoldása bármilyen c esetén. A dualitás tételében ennek Legyen $c > 0$ akkor: $y^*A > 0^*$

feladatnak bármely $\mathbf{c}$ vektor esetén van optimális megoldása, akkor van olyan nemnegatív $\mathbf{y}$ vektor, melyre $\mathbf{y^*A} > \mathbf{0^*}$!

68. Mit tud mondani az

nincs lehetséges megoldás $u^* \geq 0^*$ mellett ha $A \leq 0$
$u^*A \leq 0^*$
holott $c^* > 0^*$

$$\mathbf{Ax} \leqq \mathbf{b},$$
$$\mathbf{x} \geqq \mathbf{0},$$
$$\mathbf{c^*x} \to \max$$

feladat duálisának megoldáshalmazáról, ha $\mathbf{A} \leqq \mathbf{0}$ és $\mathbf{c} > \mathbf{0}$?

duális: $u^*A \geq c^*$, $u^* \geq 0^*$, $w = u^*b \to \min$
ez a duális a feltételt nem teljesíti, l. —

69. Tekintsük a következő feladatot:

$$\mathbf{Ax} \leqq \mathbf{b},$$
$$\mathbf{x} \geqq \mathbf{0},$$
$$\mathbf{c^*x} \to \max,$$

ahol $\mathbf{A} > \mathbf{0}$, $\mathbf{b} > \mathbf{0}$ és $\mathbf{c} > \mathbf{0}$! Bizonyítsa be, hogy ennek a feladatnak mindig van optimális megoldása, és az optimális megoldáshoz tartozó célfüggvényérték pozitív!

70. Határozza meg, hogy az alábbi, lineáris programozási feladatokra vonatkozó állítások közül melyik igaz, és melyik hamis! (Válaszát indokolja is meg!)

h *a)* Ha egy feladat L halmaza korlátos, akkor a feladatnak mindig van optimális megoldása. L üres is lehet

i *b)* Van olyan feladat, amelynek minden lehetséges megoldása egyúttal optimális megoldás is.

h *c)* Ha egy feladatnak végtelen sok optimális megoldása van, akkor a célfüggvény az L halmaz legalább két csúcspontjában felveszi az optimális értékét.

i *d)* Egy feladat optimális megoldásainak halmaza mindig konvex.

h *e)* Egy feladat optimális megoldásainak halmaza mindig korlátos.

h *f)* Van olyan feladat, amelynek pontosan k ($k \geqq 2$) optimális megoldása van.

i *g)* Az

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},$$
$$\mathbf{x} = \mathbf{0}, \qquad \underline{x} \geqq 0$$
$$\mathbf{c}^*\mathbf{x} \to \max$$

feladatnak legfeljebb egy optimális megoldása van, ha az **A** oszlopvektorai lineárisan független rendszert alkotnak.

h *h)* Egy feladatnál az optimális megoldások halmaza legalább egy elemmel kevesebb, mint a lehetséges megoldások halmaza.

i *i)* Egy feladatnak lehet olyan optimális megoldása is, amely nem bázismegoldás.

i *j)* Nem minden feladatnak van lehetséges megoldása.

i *k)* Ha egy feladat két lehetséges megoldása $\mathbf{x}_1^* = [4;\ 3;\ 7;\ -2]$ és $\mathbf{x}_2^* = [-4;\ -1;\ 3;\ 30]$, akkor biztosan lehetséges megoldás az $\mathbf{x}^* = [2;\ 2;\ 6;\ 6]$ vektor is.

h *l)* Ha egy feladatból elhagyunk egy feltételt, akkor az optimális célfüggvényérték javul.

i *m)* Ha az $\mathbf{x}_0$ egy feladat optimális megoldásai halmazának csúcspontja, akkor csúcspontja a lehetséges megoldások halmazának is.

i *n)* Létezik olyan feladat, amelynek csak egy lehetséges megoldása van.

h *o)* Ha egy feladatnak végtelen sok optimális megoldása van, akkor az optimális megoldások halmaza mindig korlátos.

$$\lambda \cdot \underline{x}_1^* + (1-\lambda)\underline{x}_2^* = \underline{x}^* \text{ - ből } \lambda = \frac{3}{4}$$