Matematikai statisztika 1.

segédanyag

Daróczi Gergely
Szociológia Intézet

PPKE BTK
2010.

0.1. Mátrixok

A mátrix vízszintes vonalban elhelyezkedő elemei sorokat, függőleges vonalban elhelyezkedő elemei oszlopokat alkotnak. Egy m sorból és n oszlopból álló mátrixot m-szer n mátrixnak nevezik (írva: m x n), az m és n pozitív egész számok a mátrix dimenziói. A mátrix dimenzióit mindig először a sorok számával majd azt követően az oszlopok számával adják meg.

Az A mátrix jelölése:

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & a_{m,3} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

A mátrixnak az i-edik sorában és j-edik oszlopában lévő elemét a mátrix i,j-edik elemének nevezik, jelölése $A_{i,j}$ vagy A[i,j]. Mindig először a sorszám, majd az oszlopszám szerepel.

TODO

0.1.1. Mátrixok szorzása

Definíció

Két mátrix szorzata akkor definiált, ha a bal oldali mátrix oszlopainak száma megegyezik a jobb oldali mátrix sorainak számával. Ha A egy m-szer n mátrix és B egy n-szer p mátrix, mátrixszorzatuk egy m-szer p méretű (m sorból, p oszlopból álló) AB mátrix lesz. Az eredménymátrix adott cellájának értéke megegyezik a hozzá tartozó sorokban és oszlopokban található A és B mátrix celláinak szorzatösszegével.

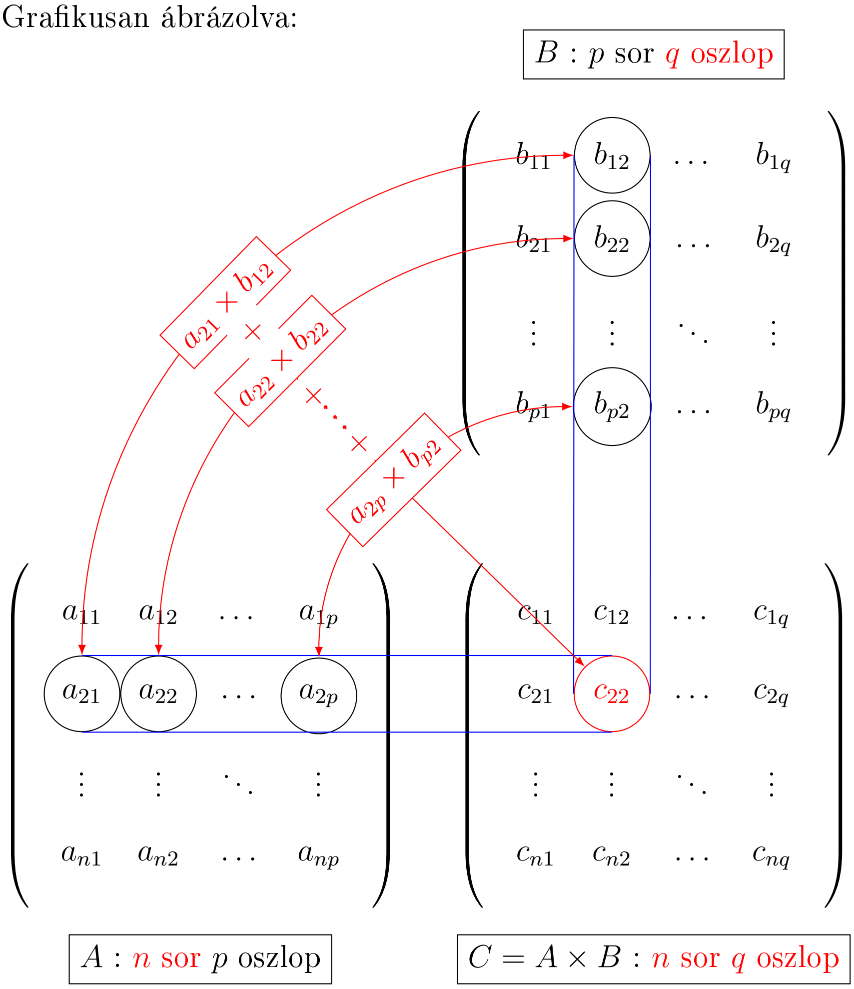
Tulajdonságok:

- asszociativitás: $(AB)C = A(BC)$
  minden k-szor m méretű A mátrixra, m x n-es méretű B mátrixra és n-szer p méretű C mátrixra.

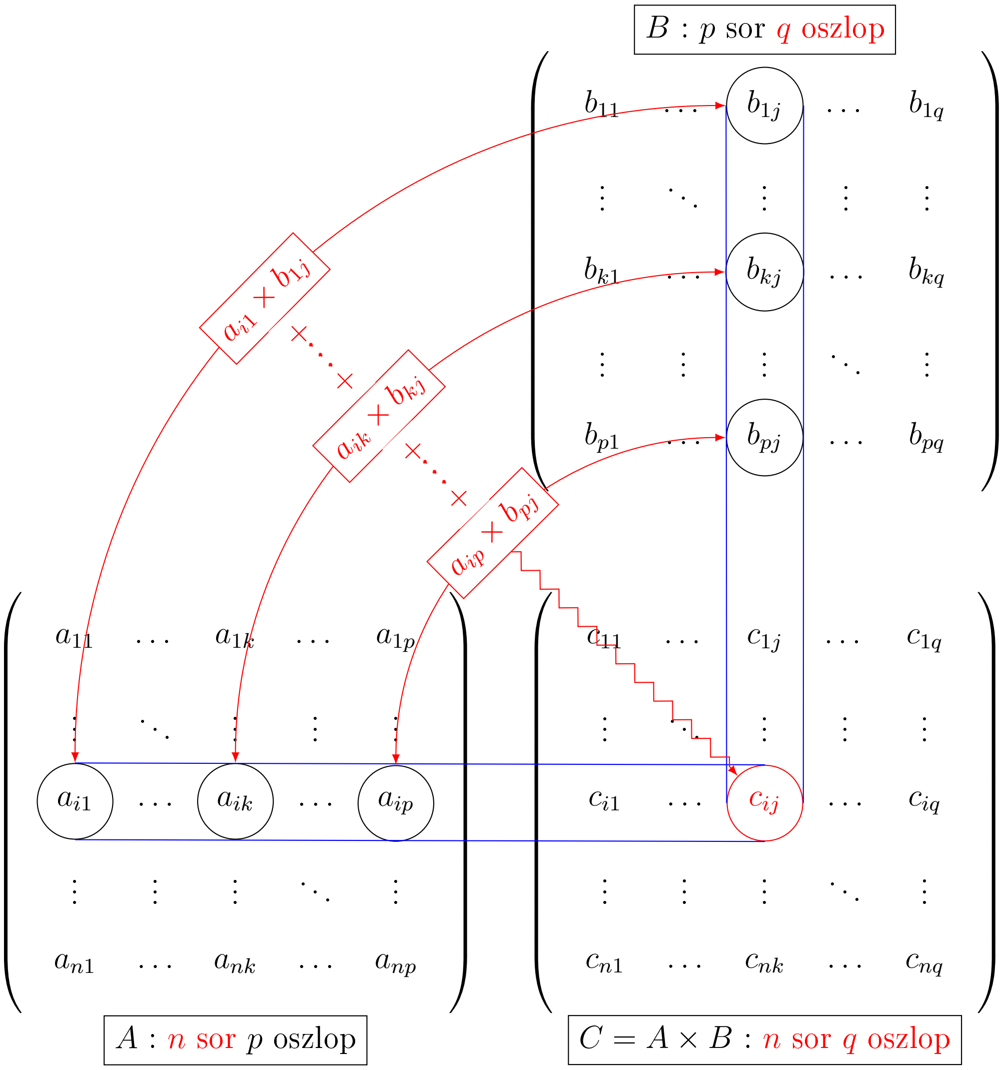
- jobb oldali disztributivitás: $(A+B)C = AC + BC$
  minden m x n-es méretű A és B mátrixra valamint n-szer k méretű C mátrixra.

- bal oldali disztributivitás: $C(A+B) = CA + CB$
  minden m-szer n méretű A és B valamint k-szor m méretű C mátrixra.

Grafikusan ábrázolva:



Forrás: *http://www.texample.net/tikz/examples/matrix-multiplication/*



Forrás: *http://www.texample.net/tikz/examples/matrix-multiplication/*

0.1.2. Determináns

Definíció

Determinánson egy négyzetes mátrixhoz rendelt számot értünk.

2x2 mátrix esetén: főátló tagjainak szorzata mínusz mellékátló tagjainak szorzata

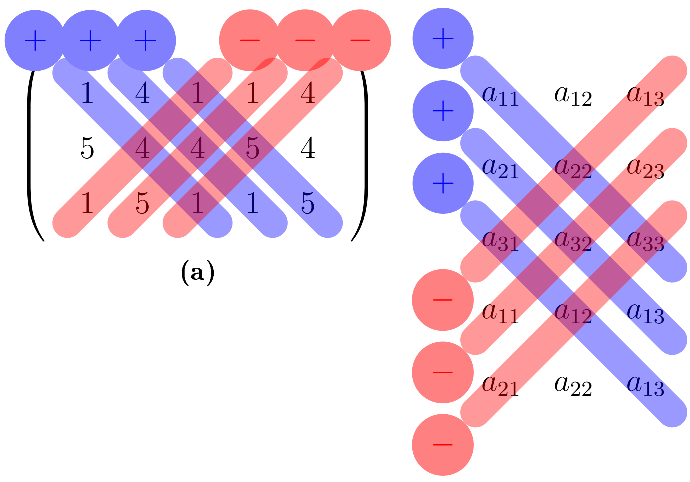
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \rightarrow det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

3x3 mátrix esetén:

det(M)= $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \big(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{33}\big) - \big(a_{13}a_{22}a_{31} + a_{23}a_{32}a_{11} + a_{33}a_{12}a_{31}\big)$

TODO

Grafikusan ábrázolva:



(a) **(b)**

Gyakorló feladatok: Számítsd ki a következő mátrixok determinánsát!

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 2 & 5 & 1 \end{bmatrix} det(A) = 2 \cdot 3 \cdot 2 + 0 \cdot 1 \cdot 5 + 1 \cdot 2 \cdot 1 - 1 \cdot 3 \cdot 5 - 2 \cdot 1 \cdot 1 - 0 \cdot 2 \cdot$$

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 2 \\ 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 5 & 2 & 5 & 5 \\ 1 & 4 & 5 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} det(B) = 5 \cdot 4 \cdot 3 + 5 \cdot 5 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \cdot 0 - 2 \cdot 4 \cdot 0 - 5 \cdot 5 \cdot 0 - 5 \cdot 1 \cdot$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 4 & 3 & 4 \end{bmatrix} det(C) = 1 \cdot 1 \cdot 4 + 4 \cdot 4 \cdot 3 + 3 \cdot 3 \cdot 4 - 3 \cdot 1 \cdot 3 - 1 \cdot 4 \cdot 4 - 4 \cdot 3 \cdot$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 5 & 4 & 4 \\ 1 & 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 1 & 4 \\ 5 & 4 & 4 & 5 & 4 \\ 1 & 5 & 1 & 1 & 5 \end{bmatrix} det(D) = 1 \cdot 4 \cdot 1 + 4 \cdot 4 \cdot 1 + 1 \cdot 5 \cdot 5 - 1 \cdot 4 \cdot 1 - 1 \cdot 4 \cdot 5 - 4 \cdot 5 \cdot$$

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 2 & 3 \end{bmatrix} det(E) = 0 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2 \cdot 3 - 2 \cdot 2 \cdot 2 - 0 \cdot 1 \cdot 3 - 2 \cdot 2 \cdot$$

$$F = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \\ 4 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & 4 & 5 & 4 & 4 \end{bmatrix} det(F) = 2 \cdot 3 \cdot 5 + 3 \cdot 2 \cdot 4 + 0 \cdot 4 \cdot 4 - 0 \cdot 3 \cdot 4 - 2 \cdot 2 \cdot 4 - 3 \cdot 4 \cdot$$

$$G = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 5 & 2 & 5 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} det(G) = 5 \cdot 1 \cdot 3 + 5 \cdot 5 \cdot 4 + 2 \cdot 4 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \cdot 4 - 5 \cdot 5 \cdot 1 - 5 \cdot 4 \cdot$$

$$H = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 5 & 2 & 1 \end{bmatrix} det(H) = 2 \cdot 2 \cdot 5 + 4 \cdot 3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 \cdot 1 - 4 \cdot 2 \cdot 2 - 2 \cdot 3 \cdot 1 - 4 \cdot 1 \cdot$$

$$I = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} det(I) = 2 \cdot 3 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \cdot 2 + 1 \cdot 3 \cdot 4 - 1 \cdot 3 \cdot 2 - 2 \cdot 0 \cdot 4 - 0 \cdot 3 \cdot$$

$$J = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} det(J) = 3 \cdot 2 \cdot 1 + 5 \cdot 2 \cdot 0 + 2 \cdot 2 \cdot 4 - 2 \cdot 2 \cdot 0 - 3 \cdot 2 \cdot 4 - 5 \cdot 2 \cdot$$

0.1.3. Mátrix inverze

Aldeterminâns mátrix

Készítsük el az aldeterminánsmátrixot, azaz a minormátrixot! Az A^{min} mátrix elemeit úgy kapjuk az A elemeiből, hogy az i-edik sort $(i \to n)$ és j-edik oszlopot $(j \to m)$ töröljük, és a maradék mátrix determinánsát számítjuk ki. Az aldetermináns mátrix elemei a következő determinánsok lesznek:

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix}$$

$$A^{min} = \begin{bmatrix} det \begin{bmatrix} \odot & \otimes & \otimes \\ \otimes & a_{2,2} & a_{2,3} \\ \otimes & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix} & det \begin{bmatrix} \otimes & \odot & \otimes \\ a_{2,1} & \otimes & a_{2,3} \\ a_{3,1} & \otimes & a_{3,3} \end{bmatrix} & det \begin{bmatrix} \otimes & \otimes & \odot \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \otimes \\ a_{3,1} & a_{3,2} & \otimes \end{bmatrix} \\ det \begin{bmatrix} \otimes & a_{1,2} & a_{1,3} \\ \odot & \otimes & \otimes \\ \otimes & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix} & det \begin{bmatrix} a_{1,1} & \otimes & a_{1,3} \\ \otimes & \odot & \otimes \\ a_{3,1} & \otimes & a_{3,3} \end{bmatrix} & det \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \otimes \\ \otimes & \otimes & \odot \\ a_{3,1} & a_{3,2} & \otimes \end{bmatrix} \\ det \begin{bmatrix} \otimes & a_{1,2} & a_{1,3} \\ \otimes & a_{2,2} & a_{2,3} \\ \odot & \otimes & \otimes \end{bmatrix} & det \begin{bmatrix} a_{1,1} & \otimes & a_{1,3} \\ a_{2,1} & \otimes & a_{2,3} \\ \otimes & \odot & \otimes \end{bmatrix} & det \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \otimes \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \otimes \\ \otimes & \otimes & \odot \end{bmatrix} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} det \begin{bmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix} & det \begin{bmatrix} a_{2,1} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,3} \end{bmatrix} & det \begin{bmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{bmatrix} \\ det \begin{bmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix} & det \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,3} \\ a_{3,1} & a_{3,3} \end{bmatrix} & det \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{bmatrix} \\ det \begin{bmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,2} & a_{2,3} \end{bmatrix} & det \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,3} \end{bmatrix} & det \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a_{2,2} \cdot a_{2,2} - a_{2,3} \cdot a_{3,2} & \cdots & a_{2,1} \cdot a_{3,2} - a_{2,2} \cdot a_{3,1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1,2} \cdot a_{2,3} - a_{1,3} \cdot a_{2,2} & \cdots & a_{1,1} \cdot a_{2,2} - a_{2,1} \cdot a_{1,2} \end{bmatrix}$$

Adjungált

Egy négyzetes mátrix *adjungált*jának nevezzük **a mátrix előjeles aldeterminánsaiból alkotott mátrix transzponáltját**. Az adjungálás tehát a négyzetes mátrixokon értelmezett operáció, mely mátrixhoz mátrixot rendel. Legfontosabb alkalmazása, hogy segítségével tömör formában fejezhető ki egy invertálható mátrix inverze.

Definíció

Egy A kvadratikus (négyzetes, azaz $n \times n$-es) mátrix adjungáltján a következő eljárással elkészített mátrixot értjük:

1. felírjuk az A mátrix aldeterminánsmátrixát vagy minormátrixát, vagyis azt az A^{min} mátrixot, melynek i,j-edik eleme annak a mátrixnak a determinánsa, melyet az A i-edik sorának és j-edik oszlopának törlésével keletkezik;

2. az A^{min} mátrix elemeinek előjelét a „sakktáblaszabály” szerint megváltoztatjuk, azaz az i,j-edik elemnek a $(-1)^{i+j}$ értéket adjuk, ekkor nyerjük az előjeles aldeterminánsmátrixot, azaz a $(A^{min})^{\pm}$ mátrixot;

3. majd ezt a mátrixot transzponáljuk, azaz elemeit a főátlóra tükrözzük: $((A^{min})^{\pm})$.

Így kapjuk az $adj(A)$-val jelölt adjungált mátrixot.

$$adj(A) = ((A^{min})^{\pm})' \tag{1}$$